Μαθηματικά Β' Λυκείου Κατεύθυνσης

Διανύσματα

Έννοια διανύσματος - Πράξεις

- **Ισότητα Διανυσμάτων**
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ όταν είναι ομόρροπα κι έχουν ίσα μέτρα
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{BA}$
- Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ διανύσματα με λ,μ ∈R τότε:

1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$	**2.** $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
3. $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$	**4.** $\vec{\alpha}$ **+ (-**$\vec{\alpha}$) = $\vec{0}$
5. $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$	**6.** $\vec{\alpha} + \vec{\chi} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\chi} = \vec{0}$
7. $\vec{\alpha} + \vec{\chi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\chi} = -\vec{\alpha}$	**8.** $-(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = (-\vec{\alpha}) + (-\vec{\beta})$
9. Αν Ο σταθερό σημείο του χώρου $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$	
10. $\left\| \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \right\| \leq \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| \leq \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$ Ειδικές περιπτώσεις: i. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\| = \|\vec{\alpha}\| + \|\vec{\beta}\|$ ii. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \left\| \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\beta}\| \right\| = \|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\|$	
11. $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$, $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$	**12.** $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
13. $(\lambda+\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$	**14.** $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$
15. $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$	**16. λ**$\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$
17. $(-\lambda)\vec{\alpha} = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$	**18.** $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$
19. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$	**20.** Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
21. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq 0$ τότε $\lambda = \mu$	

Ισχύουν επίσης:

- $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ για λ∈R, $\vec{\beta} \neq \vec{0}$
- Αν $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$ και το $\vec{\gamma}$ ανήκει στο διανυσματικόεπίπεδο των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ τότε υπάρχουν μοναδικοί λ,μ∈R ώστε $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$. Τότε το $\vec{\gamma}$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$**.
- Αν Μ είναι το μέσο του ΑΒ τότε: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ (Ο σημείο αναφοράς).

Συντεταγμένες στο επίπεδο

- Αν Οχy ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα σ' αυτό, τότε γράφουμε $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$ όπου τα χ_1, y_1 είναι οι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους $\vec{\alpha} = \chi_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}$

i. Έστω $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$, $\vec{\beta}\ (\chi_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$ και $y_1 = y_2$

ii. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$, $\vec{\beta}\ (\chi_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\chi_1+\chi_2, y_1+y_2)$

iii. Για λ∈R και $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$ είναι $\lambda\vec{\alpha} = (\lambda\chi_1, \lambda y_1)$

iv. Αν $A(\chi_1, y_1)$, $B(\chi_2, y_2)$ δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου τότε:

- $\overrightarrow{AB} = (\chi_2 - \chi_1, y_2 - y_1)$
- $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Αν Μ(χ,y) το μέσο του ΑΒ τότε: $\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

v. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (\chi_2, y_2)$ τότε:

- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \chi_1 & y_1 \\ \chi_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$
- $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y_1}{x_1}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{y_2}{x_2}$ για $\chi_1 \neq 0$, $\chi_2 \neq 0$
- $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$, εφόσων $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$ ορίζονται

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot$συν$(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}})$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta} \neq 0)$. Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{0}$
- Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (\chi_2, y_2)$ τότε: $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \chi_1\cdot\chi_2 + y_1\cdot y_2$

  συν$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \frac{\chi_1\chi_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

1. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$
2. $(\lambda\vec{\alpha})\vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha}\vec{\beta}) = \vec{\alpha}\,(\lambda\vec{\beta})$
3. $\vec{\alpha}\,(\vec{\beta}+\vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$
4. $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$
5. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
6. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
7. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$
8. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \chi_1\cdot\chi_2 + y_1\cdot y_2 = 0$
9. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}} = -1$ εφόσον ορίζονται οι συντελεστές $\lambda_{\vec{\alpha}}$, $\lambda_{\vec{\beta}}$
10. $\vec{\alpha}\cdot\vec{v} = \vec{\alpha}\cdot\vec{v_1}$ (όπου $\vec{v_1} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$)

<u>Ευθεία</u>
Εξίσωση ευθείας

α. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο Α (χ_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: ε: $\mathbf{y - y_0 = \lambda(\chi - \chi_0)}$.

β. Η εξίσωση ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(\chi_1, y_1)$ και $B(\chi_2, y_2)$ με Α≠Β. Αν $\chi_1 \neq \chi_2$ ισχύει $\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ οπότε είναι : **ε:** $\mathbf{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(\chi - \chi_1)}$

γ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0,β) είναι ε: y = λχ+β όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε).

δ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Ο (0,0) και δεν είναι ο άξονας y'y είναι:
ε: y = λχ

ε. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ είναι:
ε: $\mathbf{y = y_0}$

στ. Η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(\chi_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα y'y είναι:
ε: $\mathbf{\chi = \chi_0}$

Θεώρημα

Κάθε ευθεία έχει εξίσωση της μορφής: **Αχ +Βy +Γ = 0, με Α ≠ 0 ή Β ≠ 0 (1)**
και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

Αν **Β ≠ 0** τότε: **α.** Η ευθεία (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\mathbf{\lambda = -\frac{A}{B}}$

β. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\delta}}$ **= (Β, -Α)**

γ. Η ευθεία με εξίσωση (1) είναι κάθετη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\kappa}}$ **= (Α,Β)**

Απόσταση σημείου από ευθεία

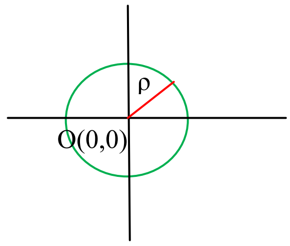
Η απόσταση d ενός σημείου $\mathbf{M_0\,(\chi_0, y_0)}$ από μια ευθεία με εξίσωση **Αχ +Βy +Γ = 0,** $|A|+|B| \neq$ **0** δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{d = d\,(M_0, \varepsilon) = \frac{|A\chi_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$

Εμβαδόν τριγώνου

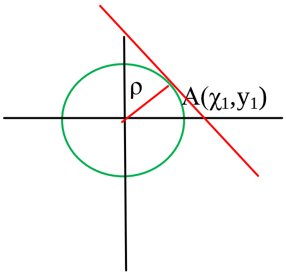
Αν είναι γνωστές οι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ, το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:
(ΑΒΓ) = $\frac{1}{2}\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\right|$

<u>Κωνικές τομές</u>
<u>Κύκλος</u>
Εξίσωση κύκλου με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ:

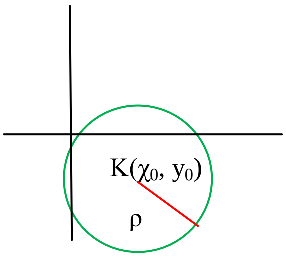
$$\boldsymbol{\chi^2 + y^2 = \rho^2}$$



Εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ στο σημείο Α(χ_1,y_1): $\boldsymbol{\chi\chi_1 + yy_1 = \rho^2}$



Εξίσωση κύκλου με κέντρο Κ(χ_0, y_0) και ακτίνα ρ: $\boldsymbol{(\chi - \chi_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2}$



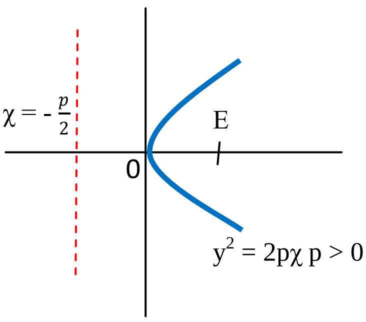
Η εξίσωση $\chi^2 + y^2 + A\chi + By + \Gamma = 0$ (1), Α, Β, Γ∈R

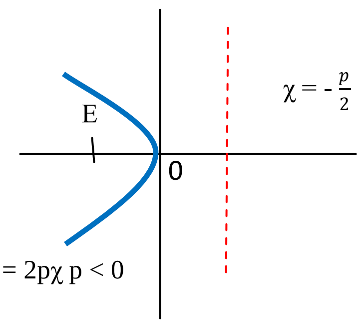
Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο: $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα
$\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$
Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

<u>Παραβολή</u>
Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία (δ) που λέγεται **διευθετούσα** της παραβολής και από ένα σταθερό σημείο Ε που λέγεται **εστία** της παραβολής. Τα σημεία που ικανοποιούν την προηγούμενη ιδιότητα ανήκουν σε μια καμπύλη που φαίνεται στα επόμενα σχήματα.

Εξίσωση παραβολής και γραφική παράσταση

1. Με κορυφή Ο(0,0), εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα δ: $\chi = -\frac{p}{2} y^2 = 2p\chi$.





2. Με κορυφή Ο(0,0), εστία Ε $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ και διευθετούσα δ: $y = -\frac{p}{2}$ $\chi^2 = 2py$