

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Φυσικοί Αριθμοί

1. Ποιοί αριθμοί ονομάζονται φυσικοί, ποιοί άρτιοι και ποιοί περιττοί;

- ✓ **Φυσικοί αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, ..., 100, 101, ..., 1000, ... Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το μηδέν που έχει μόνο επόμενο το 1.
- ✓ **Άρτιοι** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2.
- ✓ **Περιττοί** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που δε διαιρούνται με το 2.

2. Τι ονομάζεται στρογγυλοποίηση;

Η διαδικασία κατά την οποία αντικαθιστούμε ένα φυσικό αριθμό με μια προσέγγιση του, δηλαδή κάποιο άλλο λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερο του ονομάζεται **στρογγυλοποίηση**.

3. Να δοθεί ο ορισμός της πρόσθεσης και να γράψετε τις ιδιότητές της.

Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία με δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους προσθετούς, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ , που είναι το άθροισμά τους $\alpha + \beta = \gamma$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ	
$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	(ουδέτερο στοιχείο)
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)	
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)	

4. Να δοθεί ο ορισμός της αφαίρεσης;

Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, M (μειωτέος) και A (αφαιρετέος) βρίσκουμε έναν αριθμό Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στον αφαιρετέο δίνει το μειωτέο.

$$M - A = \Delta \text{ και } M = \Delta + A$$

5. Να δοθεί ο ορισμός του πολλαπλασιασμού και να γράψετε τις ιδιότητές του.

Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους παράγοντες, βρίσκουμε ένα τρίτο φυσικό αριθμό γ που είναι το γινόμενο τους $\alpha \cdot \beta = \gamma$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ	
$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$	
$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)	
$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)	
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση)	
$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = (\alpha \cdot \beta) - (\alpha \cdot \gamma)$ (επιμεριστική ιδιότητα ως προς την αφαίρεση)	

6. Να δοθεί ο ορισμός της δύναμης του α .

Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$ που έχει n παράγοντες ίσους με το α , λέγεται δύναμη του α στη n ή νιοστή δύναμη του

$$\alpha \cdot \alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$$

7. Τι λέγεται αριθμητική παράσταση;

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

8. Να γραφτεί η σχέση που ισχύει για την Ευκλείδεια Διαίρεση και στη συνέχεια να γραφτεί ο τύπος που ισχύει για την τέλεια διαίρεση.

Ευκλείδεια διαίρεση : $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ Όπου: $\Delta \rightarrow$ Διαιρετέος
 Τέλεια διαίρεση : $\Delta = \delta \cdot \pi$ $\delta \rightarrow$ διαιρέτης
 (Σε αυτή την περίπτωση το υπόλοιπο είναι 0) $\pi \rightarrow$ πηλίκο
 $\upsilon \rightarrow$ υπόλοιπο

9. Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια και ποιές είναι οι ιδιότητές τους;

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς $0, a, 2a, 3a, \dots$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ

Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του
 Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
 Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.

10. Να δοθεί ο ορισμός του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου και του μέγιστου κοινού διαιρέτη των a και β .

- ✓ **Ε.Κ.Π.** ονομάζουμε το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που κανένας από τους δύο δεν είναι μηδέν.
- ✓ **Μ.Κ.Δ.** δύο φυσικών αριθμών a και β ονομάζεται ο μεγαλύτερος από τους κοινούς τους διαιρέτες.

11. Ποιοί αριθμοί ονομάζονται διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a ;

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

12. Πότε ένας αριθμός λέγεται πρώτος και πότε σύνθετος;

Πρώτος αριθμός λέγεται ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1, διαφορετικά λέγεται σύνθετος.

13. Ποιοί αριθμοί λέγονται πρώτοι μεταξύ τους;

Πρώτοι μεταξύ τους δύο αριθμοί a και β λέγονται αν είναι Μ.Κ.Δ. $(a, \beta) = 1$

14. Κριτήρια Διαιρετότητας.

Κριτήρια Διαιρετότητας με 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25 λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

- ✓ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 10, αν λήγει σε μηδενικό
- ✓ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο λήγει σε 0, 2, 4, 6, 8.
- ✓ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή σε 5.
- ✓ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 3 ή το 9, αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- ✓ Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 4 ή το 25, αν τα δύο τελευταία ψηφία του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2°

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

1. Πότε ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα;

Όταν σε ένα κλάσμα ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρανομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.

2. Πότε δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα ;

Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ισοδύναμα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

✓ Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα «χιαστή γινόμενα» είναι ίσα.

Δηλαδή : αν $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ τότε : $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

✓ Όταν οι όροι ενός κλάσματος πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$) προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο.

3. Ποιο κλάσμα λέγεται ανάγωγο;

Ανάγωγο κλάσμα λέγεται εκείνο το κλάσμα το οποίο δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο.

Απλοποίηση του κλάσματος λέγεται η διαδικασία που έχει ως αποτέλεσμα ένα κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό με μικρότερους όρους.

4. Πότε δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται ομώνυμα και πότε ετερόνυμα;

Ομώνυμα δύο ή περισσότερα κλάσματα λέγονται όταν έχουν τον ίδιο παρανομαστή.

Ετερόνυμα κλάσματα λέγονται όταν έχουν διαφορετικούς παρανομαστές.

5. Σύγκριση κλασμάτων.

Για τη σύγκριση κλασμάτων ισχύουν τα εξής:

✓ *Ομώνυμα κλάσματα*: Από δύο ομώνυμα κλάσματα, εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι μεγαλύτερο.

✓ *Ετερόνυμα κλάσματα*: Για να συγκρίνουμε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους.

✓ *Ετερόνυμα κλάσματα με ίδιο αριθμητή* : Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή, μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρανομαστή.

6. Ποιά είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για την πρόσθεση και αφαίρεσης ομώνυμων και ετερόνυμων κλασμάτων;

✓ *Ομώνυμα κλάσματα*: Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους. Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

✓ *Ετερόνυμα κλάσματα*: Προσθέτουμε ετερόνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα. Αφαιρούμε δύο ετερόνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

7. Ποιός αριθμός ονομάζεται μεικτός;

Μεικτός ονομάζεται ο αριθμός που παριστάνει το άθροισμα ενός ακέραιου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

8. Να δοθεί ο ορισμός του γινομένου δύο κλασμάτων και ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα.

✓ *Το γινόμενο δυο κλασμάτων* είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρανομαστή το γινόμενο των παρανομαστών. $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

✓ Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρανομαστή. $\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \lambda}{\beta}$

9. Ποιά κλάσματα λέγονται αντίστροφα;

Αντίστροφα κλάσματα λέγονται τα κλάσματα που έχουν γινόμενο 1.

Επειδή $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$, τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ είναι αντίστροφα.

10. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού κλασμάτων.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ	ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ
Το 1 δε μεταβάλλει το γινόμενο	$1 \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, 1 = \frac{\alpha}{\alpha}$
Αντιμεταθετική	$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$
Προσεταιριστική	$(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}) \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot (\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta})$
Επιμεριστική	$\frac{\alpha}{\beta} \cdot (\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\epsilon}{\zeta}) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot (\frac{\gamma}{\delta} - \frac{\epsilon}{\zeta}) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$

11. Ποιά είναι η διαδικασία που ακολουθούμε για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς και ποιά για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα;

✓ Για να διαιρέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο ή τον αντίστροφο του διαιρέτη. $a : \beta = a \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{a}{\beta}$

✓ Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

12. Ποιό κλάσμα ονομάζεται σύνθετο;

Σύνθετο κλάσμα ονομάζεται ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

Κεφάλαιο 3^ο

Δεκαδικοί Αριθμοί

1. Ποιό κλάσμα ονομάζεται δεκαδικό;

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρανομαστή μια δύναμη του 10.

2. Γραφή και ανάγνωση των δεκαδικών αριθμών.

- ✓ Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το ακέραιο μέρος και το δεκαδικό μέρος του.
- ✓ Αυτά διαχωρίζονται με την υποδιαστολή.
- ✓ Στο ακέραιο μέρος οι τάξεις είναι σε μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες ... κ.τ.λ.

- ✓ Στο δεκαδικό μέρος οι τάξεις είναι τα δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά . . . κ.τ.λ.
- ✓ Δέκα μονάδες μιας τάξης είναι μια μονάδα μεγαλύτερης τάξης.

3. Σύγκριση δεκαδικών αριθμών.

Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφία της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο ψηφίο στην αρχική τάξη.

Αν δύο δεκαδικοί αριθμοί αρχίζουν από ψηφίο της ίδιας τάξης, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το αμέσως επόμενο ψηφίο μεγαλύτερο.

4. Στρογγυλοποίηση δεκαδικών αριθμών.

Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Προσδιορίζουμε τη δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση

Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης

Αν αυτό είναι μικρότερο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται.

Αν αυτό είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 5, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων μηδενίζονται και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

5. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς.

✓ Πρόσθεση και αφαίρεση

Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα ψηφία της ίδιας τάξης, τοποθετώντας τους αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο έτσι ώστε οι υποδιαστολές να γράφονται στην ίδια στήλη.

✓ Πολλαπλασιασμός

Ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και των φυσικών αριθμών. Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα από τα δεξιά προς τα αριστερά όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

✓ Διαίρεση

Η διαίρεση δεκαδικού αριθμού με δεκαδικό αριθμό γίνεται όπως και η Ευκλείδεια διαίρεση. Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρέτη με το διαιρετέο με την κατάλληλη δύναμη του 10 έτσι ώστε ο διαιρέτης να γίνει φυσικός αριθμός. Όταν εξαντληθεί το ακέραιο μέρος του διαιρετέου «κατεβάζουμε» το μηδέν ως πρώτο δεκαδικό ψηφίο από τον διαιρετέο και τοποθετούμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Όταν πολλαπλασιάζουμε με 0,1 , 0,01, 0,001 , ... ή όταν διαιρούμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10 , 100, 1000, Μεταφέρουμε την υποδιαστολή μία, δύο, τρεις, ... αντίστοιχα θέσεις.

Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000, μεταφέρουμε την υποδιαστολή του αριθμού προς τα δεξιά μία, δύο, τρεις, ... αντίστοιχα θέσεις.

6. Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό.

Οι δυνάμεις των δεκαδικών αριθμών έχουν τις ιδιότητες των δυνάμεων των φυσικών αριθμών. Το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της βάσης επί τον εκθέτη της δύναμης.

7. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

Ένας μεγάλος αριθμός μπορεί να γραφεί στην μορφή $a \cdot 10^n$, δηλαδή ως γινόμενο ενός αριθμού a επί μία δύναμη του 10. Τη μορφή αυτή την ονομάζουμε τυποποιημένη. Ο αριθμός a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο ψηφίο μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10.

8. Μονάδες μέτρησης

• Μονάδες μέτρησης μήκους

Η βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι το μέτρο και συμβολίζεται με m

✓ **Υποδιαιρέσεις του μέτρου**

1 δεκάμετρο ή παλάμη dm $1\text{dm} = \frac{1}{10}\text{m} = 0,1\text{ m}$

1 εκατοστόμετρο ή πόντος cm $1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{m} = 0,01\text{m}$

1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό mm $1\text{mm} = \frac{1}{1000}\text{m} = 0,001\text{ m}$

✓ **Πολλαπλάσιο του μέτρου**

1 χιλιόμετρο km $1\text{km} = 1000\text{m}$

Στη ναυσιπλοΐα, ως μονάδα μέτρησης χρησιμοποιούμε το ναυτικό μίλι

1 ναυτικό μίλι = 1852m

• **Μονάδες μέτρησης του εμβαδού.**

Η βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού είναι το τετραγωνικό μέτρο, συμβολίζεται με m^2 , είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου με πλευρά ένα μέτρο.

✓ **Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου**

1 τετραγωνικό δεκάτομετρο $\text{dm}^2 = \frac{1}{100}\text{m}^2 = 0,01\text{ m}^2$

1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο $\text{cm}^2 = \frac{1}{10000}\text{m}^2 = 0,0001\text{ m}^2$

1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο $\text{mm}^2 = \frac{1}{1000000}\text{m}^2 = 0,000001\text{m}^2$

Ως μονάδα επιφάνειας χρησιμοποιούμε και το στρέμμα

$1\text{km}^2 = 1.000.000\text{m}^2 = 10^6\text{m}^2$, 1 στρέμμα = 1000m^2

• **Μονάδες μέτρησης του όγκου**

Η βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το κυβικό μέτρο, συμβολίζεται με m^3 που είναι ο όγκος ενός κύβου ακμής ενός μέτρου.

✓ **Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου**

1 κυβικό δεκάτομετρο dm^3 $1\text{dm}^3 = \frac{1}{1000}\text{m}^3 = 0,001\text{ m}^3$

1 κυβικό εκατοστόμετρο cm^3 $1\text{cm}^3 = \frac{1}{1000.000}\text{m}^3 = 0,000001\text{ m}^3$

1 κυβικό χιλιοστόμετρο mm^3 $1\text{mm}^3 = \frac{1}{1000.000.000}\text{m}^3 = 0,000000001\text{ m}^3$

Για τη μέτρηση του όγκου χρησιμοποιούμε το λίτρο (lt) και το χιλιοστόλιτρο (ml)

$1\text{lt} = 1\text{dm}^3 = 0,001\text{m}^3$

$1\text{ml} = 1\text{cm}^3 = 0,001\text{lt} = 0,000001\text{ m}^3$

• **Μονάδες μέτρησης χρόνου**

Η μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο και συμβολίζεται με s

✓ **Πολλαπλάσια**

1 λεπτό (min) = 60s

1 ώρα (h) = 60 min = 3.600s

1 ημέρα = 24h = 1440min = 86.400s

• **Μονάδες μέτρησης μάζας**

Η βασική μονάδα μέτρησης μάζας είναι το χιλιόγραμμα ή κιλό και συμβολίζεται με kg

✓ **Υποδιαιρέσεις του κιλού**

1 γραμμάριο (g) $1\text{g} = 0,001\text{kg}$

1 χιλιοστόγραμμα (mg) $1\text{mg} = 0,001\text{g} = 0,000001\text{kg}$

✓ **Πολλαπλάσια του κιλού**

1 τόνος (t) $1\text{t} = 1.000\text{kg}$

9. Προτεραιότητα πράξεων

- ✓ Εκτελούμε τις πράξεις των δυνάμεων
- ✓ Έπειτα τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης
- ✓ Τέλος τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης
- ✓ Οι πράξεις μέσα στην παρένθεση προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά

Κεφάλαιο 4^ο

Εξισώσεις και προβλήματα

1. Να δοθεί ο ορισμός της εξίσωσης με έναν άγνωστο.

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μια ισότητα που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα, που ονομάζεται άγνωστος.

2. Τι ονομάζουμε λύση ή ρίζα της εξίσωσης και τι επίλυση της εξίσωσης;

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο επαληθεύει την ισότητα.

Επίλυση της εξίσωσης λέγεται η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση της εξίσωσης.

3. Πότε μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη και πότε αδύνατη;

- ✓ Μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.
- ✓ Μια εξίσωση λέγεται αδύνατη όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

4. Λύσεις των εξισώσεων

Πρόσθεση	$x + \alpha = \beta$ $x = \beta - \alpha$	
Αφαίρεση	$x - \alpha = \beta$ $x = \beta + \alpha$	$\alpha - x = \beta$ $x = \alpha - \beta$
Πολλαπλασιασμός	$\alpha \cdot x = \beta$ $x = \beta : \alpha$	
Διαίρεση	$\alpha : x = \beta$ $x = \alpha : \beta$	$x : \alpha = \beta$ $x = \beta \cdot \alpha$

5. Τι ονομάζουμε πρόβλημα, τι λύση και τι επίλυση;

Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση που δημιουργείται όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.

Λύση ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.

Επίλυση ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία με την οποία επιτυγχάνεται η λύση του.

6. Βήματα επίλυσης ενός προβλήματος.

Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με ένα γράμμα (x ή y ή zκ.τ.λ) που είναι ο άγνωστος του προβλήματος.

Εκφράζουμε στοιχεία του προβλήματος με τη βοήθεια του αγνώστου.

Περιγράφουμε με μία εξίσωση το πρόβλημα.

Επιλύουμε την εξίσωση του προβλήματος.

Επαληθεύουμε την λύση που βρήκαμε.

Κεφάλαιο 5^ο

Ποσοστά

1. Τι ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό;

Το σύμβολο $a\%$ ονομάζεται ποσοστό επί τοις εκατό ή απλούστερα ποσοστό και είναι ίσο με το $\frac{a}{100}$

2. Τι ονομάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις;

Το σύμβολο $a\%$

3. Ποσοστό $a\%$ του B

Το ποσοστό $a\%$ του B είναι: $\frac{a}{100} \cdot B$

Κεφάλαιο 6^ο

Ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

1. Παράσταση των σημείων στο επίπεδο

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την θέση ενός σημείου στο επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ημιευθείες Ox και Oy και πάνω σε κάθε μία από αυτές ορίζουμε την ίδια μονάδα μέτρησης. Αυτές οι ημιευθείες αποτελούν ένα σύστημα ημιαξόνων

Ο ημιάξονας Ox λέγεται ημιάξονας των τετμημένων ή ημιάξονας των x

Ο ημιάξονας Oy λέγεται ημιάξονας των τεταγμένων ή ημιάξονας των y

Το σημείο O ονομάζεται αρχή των ημιαξόνων

Έστω ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου. Το x ονομάζεται τετμημένη και το y τεταγμένη.

Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M ονομάζονται συντεταγμένες του σημείου M .

2. Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα;

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα εάν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, που όταν οι τιμές του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο: $a = \frac{y}{x}$

το πηλίκο a λέγεται συντελεστής αναλογίας

3. Γραφική παράσταση – σχέση αναλογίας

Σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x,y) δύο ανάλογων ποσών βρίσκονται πάνω σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή $O(0,0)$ των ημιαξόνων

4. Προβλήματα ανολογιών

Για να διαπιστώσουμε εάν δύο ποσά είναι ανάλογα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:

Τον ορισμό των ανάλογων ποσών

Τη σχέση $y = a \cdot x$

Τη σχέση $a = \frac{y}{x}$

5. Πότε δύο μεγέθη λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Δύο μεγέθη είναι αντιστρόφως ανάλογα στην περίπτωση που η μεταβολή τους είναι τέτοια ώστε όταν το ένα μέγεθος πολλαπλασιάζεται επί έναν αριθμό το άλλο διαιρείται με τον ίδιο αριθμό. Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους παραμένει σταθερό : $a = y \cdot x, a \neq 0$

6. Πότε δύο αριθμοί x και y λέγονται αντίστροφοι;

Δύο αριθμοί x και y λέγονται αντίστροφοι στην περίπτωση που $xy = 1$

7. Ποια καμπύλη ονομάζεται υπερβολή;

Τα σημεία που παριστάνουν τα ζεύγη (x,y) βρίσκονται σε μια καμπύλη γραμμής. Η καμπύλη αυτή ονομάζεται υπερβολή. Η υπερβολή γεν τέμνει ποτέ τους ημιάξονες Ox και Oy διότι οι συντεταγμένες των σημείων της δεν παίρνουν ποτέ την τιμή 0.

Κεφάλαιο 7^ο

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

1. Τι λέμε πρόσημα;

Πρόσημα λέγονται τα σύμβολα «+» και «-»

2. Ποιοί λέγονται θετικοί και αρνητικοί αριθμοί;

Θετικοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί πριν από τους οποίους τοποθετείται το πρόσημο «+» .

Σε περίπτωση που αναφερόμαστε μόνο σε θετικούς αριθμούς μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο «+».

Αρνητικοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί πριν από τους οποίους τοποθετείται το πρόσημο «-»

3. Ποιοί αριθμοί ονομάζονται ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο και ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

4. Ποιοί αριθμοί ονομάζονται ακέραιοι και ποιοί ρητοί;

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς

Ρητοί αριθμοί είναι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί : φυσικοί , κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.

6. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a ;

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$

Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός.

Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι μηδέν.

7. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

8. Σύγκριση ρητών αριθμών

Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλον πάνω στον άξονα.

Κάθε θετικός ρητός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό αριθμό.

Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό

Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή.

9. Ποια διαδικασία ακολουθούμε για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς και ποια για δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

- ✓ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το κοινό πρόσημό τους.
- ✓ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε από την μεγαλύτερη την μικρότερη απόλυτη τιμή και στην διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

10. Ιδιότητες πρόσθεσης.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ
Αντιμεταθετική ιδιότητα	$a + b = b + a$
Προσεταιριστική ιδιότητα	$a + (b + \gamma) = (a + b) + \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a + 0 = 0 + a = a$
Αντίθετο στοιχείο	$a + (-a) = (-a) + a = 0$

11. Ποια διαδικασία ακολουθούμε για να αφαιρέσουμε ρητούς αριθμούς ;

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό a τον αριθμό b προσθέτουμε στον a τον αντίθετο του b : $a - b = a + (-b)$

12. Απαλοιφή παρενθέσεων

Για να απαλείψουμε τις παρενθέσεις εργαζόμαστε ως εξής:

- ✓ Όταν μία παρένθεση έχει μπροστά της το «+» μπορούμε να το απαλείψουμε μαζί με το «+» και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.
- ✓ Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «-» μπορούμε να απαλείψουμε μαζί με το «-» και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

13. Ποιά διαδικασία ακολουθούμε για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς και ποιά δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

- ✓ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+». Δηλαδή $(+) \cdot (+) = (+)$ και $(-) \cdot (-) = (+)$
- ✓ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-». Δηλαδή $(+) \cdot (-) = (-)$ και $(-) \cdot (+) = (-)$

14. Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ
Αντιμεταθετική ιδιότητα	$a \cdot b = b \cdot a$
Προσεταιριστική ιδιότητα	$a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \cdot b) \cdot \gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Επιμεριστική ιδιότητα	$a \cdot (b + \gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$ $a \cdot (b - \gamma) = a \cdot b - a \cdot \gamma$
Όταν πολλαπλασιάζεται με το 0	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

15. Πότε οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι;

Οι ρητοί αριθμοί λέγονται αντίστροφοι όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενο τους είναι ίσο με τη μονάδα.

16. Ποια διαδικασία ακολουθούμε για να υπολογίσουμε το γινόμενο πολλών παραγόντων ;

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων, που κανένας δεν είναι μηδέν, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε :

Το **πρόσημο +** , αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **άρτιο (ζυγό)**

Το **πρόσημο -** , αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι **περιττό (μονό)**

Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν , τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν.

17. Ποιά διαδικασία ακολουθούμε για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

✓ Το πρόσημο + αν είναι ομόσημοι. Δηλαδή : (+) : (+) = (+) **και** (-) : (-) = (+)

✓ Το πρόσημο - αν είναι ετερόσημοι. Δηλαδή : (+) : (-) = (-) **και** (-) : (+) = (-)

18. Διαίρεση ρητών αριθμών

Το πηλίκο της διαίρεσης $a : b$ ή $\frac{a}{b}$, λέγεται ο λόγος του α προς το β και ορίζεται ως η μοναδική λύση τα εξίσωσης : $b \cdot x = a$

Η διαίρεση $\frac{a}{b}$ μπορεί και να γραφεί $a \cdot \frac{1}{b}$, επομένως για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.

19. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού. Το πλήθος των επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται περίοδος. Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή κλασματικού ρητού.

20. Να δοθεί ο ορισμός της δύναμης με βάση το α και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.

Το γινόμενο $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (είτε ο α είναι θετικός , είτε αρνητικός ρητός) συμβολίζεται με το a^n και λέγεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Για $n = 1$, έχουμε $a^1 = a$

Η δύναμη a^n διαβάζεται και νιοστή δύναμη του α

Η δύναμη a^2 λέγεται και τετράγωνο του α ή α στο τετράγωνο

Η δύναμη a^3 λέγεται κύβος του α ή α στον κύβο

21. Πρόσημο δύναμης ρητού αριθμού με εκθέτη φυσικό αριθμό.

✓ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός

Αν $a > 0$ τότε $a^v > 0$

✓ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός

Αν $a < 0$ και v άρτιος τότε $a^v > 0$

✓ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

Αν $a < 0$ και v περιττός τότε $a^v < 0$

22. Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό και με εκθέτη ακέραιο

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ με εκθέτη φυσικό
$a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$
$a^v : a^\mu = a^{v-\mu}$
$(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}$
$(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ με εκθέτη ακέραιο
$a^0 = 1$ με $a \neq 0$
$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$ με $a \neq 0$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$ με $a \neq 0$ και $\beta \neq 0$

23. Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

Όπως οι πολύ μεγάλοι έτσι και οι πολύ μικροί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή : $a \cdot 10^{-v}$, όπου a είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και v φυσικό αριθμό.

24. Προτεραιότητα των πράξεων στους ρητούς αριθμούς

- ✓ Εκτελούμε τις δυνάμεις
- ✓ Στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης
- ✓ Τέλος εκτελούμε τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης
- ✓ Οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις προηγούνται και γίνονται με την παραπάνω σειρά.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

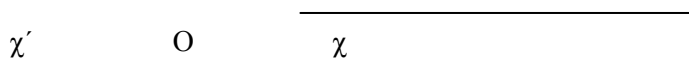
ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Τι ονομάζεται σημείο, ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, ημιευθεία, επίπεδο, ημιεπίπεδο;

- ✓ Ένα **σημείο** δεν έχει διαστάσεις. Δεν έχει δηλαδή μήκος ή πλάτος ή εμβαδόν. Ένα σημείο μπορούμε να το παραστήσουμε με μια τελεία και να το ονομάσουμε με ένα κεφαλαίο γράμμα.
- ✓ Για να κατασκευάσουμε ένα **ευθύγραμμο τμήμα**, παίρνουμε δύο σημεία Α και Β που ονομάζονται άκρα και τα οποία ενώνουμε με μια γραμμή. Το ονομάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ή ΒΑ.
- ✓ Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τότε το νέο σχήμα, που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος λέγεται **ευθεία**.
 - Την ευθεία τη συμβολίζουμε με (ϵ) , ή $\chi\chi$ ή $\psi\psi$.
 - Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.

→ Από δύο σημεία διέρχεται μια μόνο ευθεία.

- ✓ Εάν προεκτείνουμε απεριόριστα ένα ευθύγραμμο τμήμα AB πέρα από το ένα μόνο άκρο του π.χ το B, τότε το νέο σχήμα, που έχει αρχή το A αλλά δεν έχει τέλος, λέγεται **ημιευθεία**.
- ✓ Εάν O είναι ένα σημείο της ευθείας $\chi\chi'$, τότε με αρχή το O ορίζονται δύο ημιευθείες O χ και O χ' , οι οποίες λέγονται **αντικείμενες ημιευθείες**.

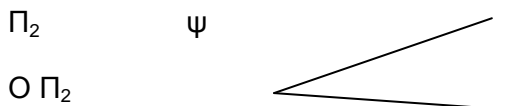


- ✓ **Επίπεδο** είναι μια επιφάνεια, πάνω στην οποία εφαρμόζει παντού η ευθεία γραμμή. Η ονομασία του επιπέδου δίνεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου
- ✓ Κάθε ευθεία ενός επιπέδου το χωρίζει σε δύο **ημιεπίπεδα**.

2. Τι ονομάζεται γωνία, γραμμή, επίπεδα σχήματα, ευθύγραμμο σχήματα, ίσα σχήματα;

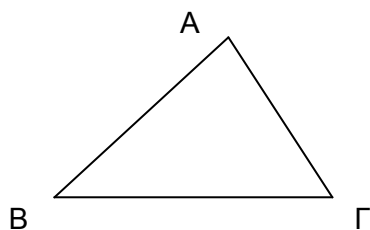
- ✓ Σχεδιάζουμε δύο ημιευθείες O χ και O ψ , με κοινή αρχή το σημείο O. Οι ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές Π_1 και Π_2

Κάθε μία από τις περιοχές αυτές μαζί με τις ημιευθείες O χ και O ψ ονομάζεται **γωνία**. Η μικρότερη Π_1 λέγεται κυρτή και η άλλη Π_2 μη κυρτή γωνία. Το σημείο O λέγεται κορυφή της γωνίας και οι ημιευθείες O χ και O ψ λέγονται πλευρές της γωνίας. Τις γωνίες που σχηματίζονται τις συμβολίζουμε $\chi\hat{O}\psi$ ή $\psi\hat{O}\chi$ ή με ένα μικρό γράμμα, π.χ. $\hat{\omega}$.



- ✓ Ένα **τρίγωνο** ABΓ έχει τρεις γωνίες, τις $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$. Η \hat{A} λέμε ότι περιέχεται μεταξύ των πλευρών AB και AΓ του τριγώνου.

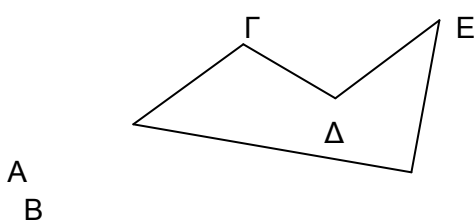
Λέμε ότι η πλευρά BΓ είναι απέναντι από την \hat{A} , ενώ οι γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες της πλευράς BΓ.



- ✓ **Τεθλασμένη γραμμή** είναι μια πολυγωνική γραμμή, που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
- ✓ **Ευθύγραμμο σχήμα** ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.
- ✓ Μια τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **κυρτή**, όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο. Διαφορετικά λέγεται **μη κυρτή**.
 - Δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ίσα, αν συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο.
 - Οι αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των ίσων σχημάτων είναι ίσες.

3. Ποια η διαδικασία πρόσθεσης και αφαίρεσης ευθυγράμμων τμημάτων;

Η τεθλασμένη γραμμή έχει μήκος το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων, από τα οποία αποτελείται.



→ Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι μικρότερο από το μήκος κάθε τεθλασμένης γραμμής με τα ίδια άκρα A και B.

Περίμετρος ενός σχήματος είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του σχήματος.

4. Ποια η διαδικασία μέτρησης, σύγκρισης και ισότητας γωνιών;

Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με το μοιρογνωμόνιο. Μονάδα μέτρησης των γωνιών είναι η μοίρα.

Είναι : $1^\circ = 60'$ (πρώτα λεπτά) και $1' = 60''$ (δεύτερα λεπτά)

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο είναι ίσες.

→ Οι **προσκειμένες** στη βάση ισοσκελούς τριγώνου γωνίες είναι ίσες.

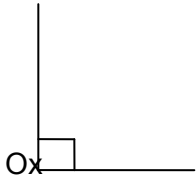
5. Τι ονομάζεται διχοτόμος;

Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

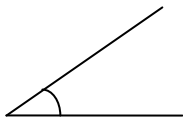
6. Ποια είναι τα είδη των γωνιών;

✓ **Ορθή** γωνία λέγεται αυτή που το μέτρο της είναι ίσο με 90° .

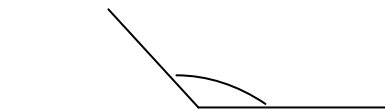
→ Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι κάθετες ημιευθείες.



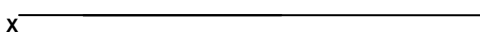
✓ **Οξεία** γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μικρότερο των 90° .



✓ **Αμβλεία** γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 90° και μικρότερο των 180° .

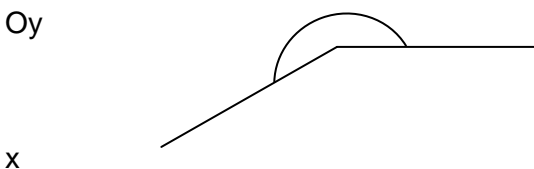


✓ **Ευθεία** γωνία λέγεται η γωνία της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 180° .

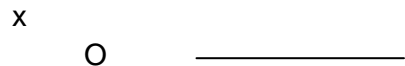


→ Οι πλευρές της ευθείας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες.

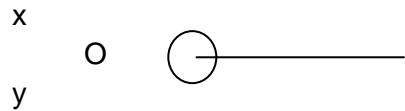
✓ **Μη κορυτή** γωνία λέγεται κάθε γωνία με μέτρο μεγαλύτερο των 180° και μικρότερο των 360° .



✓ **Μηδενική** γωνία λέγεται αυτή, της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 0° .



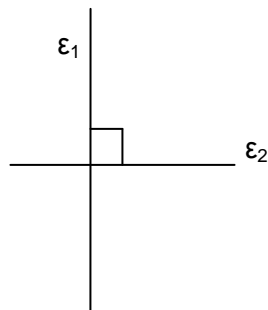
✓ **Πλήρης** γωνία λέγεται αυτή, της οποίας το μέτρο είναι ίσο με 360° .



7. Πότε δύο ευθείες ονομάζονται κάθετες;

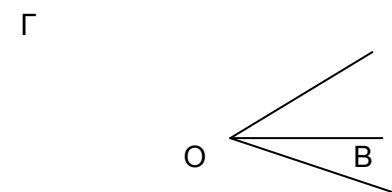
Δύο ευθείες είναι κάθετες όταν οι γωνίες, που σχηματίζουν αυτές τεμνόμενες, είναι ορθές.

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (ε_1 κάθετη στην ε_2).

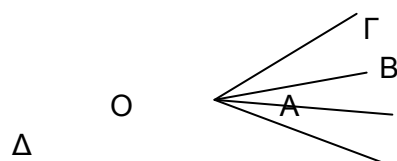


8. Ποιες γωνίες ονομάζονται εφεξής, διαδοχικές, παραπληρωματικές, συμπληρωματικές και κατακορυφήν γωνίες;

✓ **Εφεξής** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο.

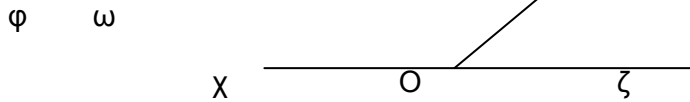


✓ **Διαδοχικές** γωνίες λέγονται περισσότερες από δύο γωνίες, που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και καθεμιά από αυτές είναι εφεξής γωνία με την προηγούμενη ή την επόμενη της.



✓ **Παραπληρωματικές** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° . Η κάθε μία από αυτές λέγεται

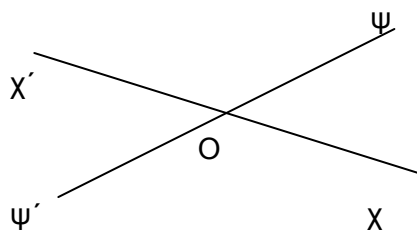
παραπληρωματική της άλλης.



✓ **Συμπληρωματικές** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° . Η κάθε μία από αυτές λέγεται συμπληρωματική της άλλης.



✓ **Κατακορυφήν** γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την κορυφή τους κοινή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.



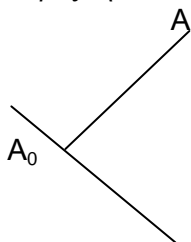
Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.

9. Τι γνωρίζετε για τις θέσεις ευθειών στο επίπεδο;

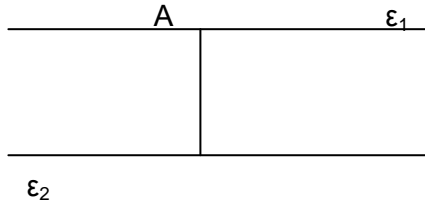
- ✓ Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου λέγονται παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό σημείο όσο κι αν προεκταθούν.
- ✓ Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο ονομάζονται τεμνόμενες και το κοινό τους σημείο λέγεται σημείο τομής των δύο ευθειών.
- ✓ Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται. Συμβολισμός παράλληλων ευθειών: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
- ✓ Δύο ευθείες του επιπέδου κάθετες σε μια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
Από ένα σημείο Α, εκτός ευθείας ε, διέρχεται μία και μοναδική ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε.

10. Τι ονομάζεται απόσταση σημείου από ευθεία και απόσταση παραλλήλων;

- ✓ Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου ευθύγραμμου τμήματος AA_0 από το σημείο Α προς την ευθεία ε.



✓ Απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών λέγεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες ευθείες και έχει τα άκρα του σε αυτές, π.χ το AB



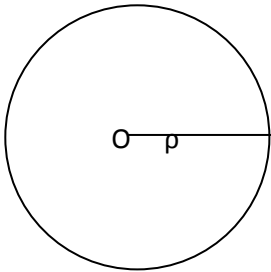
B

10. Τι γνωρίζετε για τον κύκλο και τα στοιχεία του κύκλου;

Κύκλος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο O.

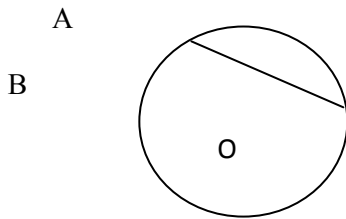
Η **απόσταση** αυτή συμβολίζεται με ρ και λέγεται ακτίνα του κύκλου. Το σημείο O λέγεται **κέντρο** του κύκλου.

Ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ , συμβολίζεται με (O, ρ).



Δύο κύκλοι με ακτίνες ίσες είναι ίσοι.

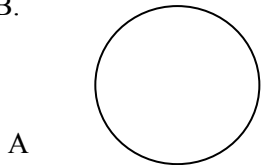
Το ευθύγραμμο τμήμα AB που συνδέει δύο σημεία A και B του κύκλου, λέγεται **χορδή** του κύκλου.



Ειδικά η χορδή που περνάει από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου.

Η **διάμετρος** είναι η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου, είναι διπλάσια από την ακτίνα του κύκλου και χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη (ημικύκλια).

Δύο σημεία A και B του κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη που το καθένα λέγεται **τόξο** του κύκλου με άκρα τα A και B.



Κυκλικός δίσκος (O, ρ) είναι ο κύκλος (O, ρ) μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.

Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο O απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ .

Δύο κύκλοι λέγονται **ομόκεντροι**, αν έχουν το ίδιο κέντρο.

11. Τι ονομάζεται επίκεντρη γωνία, ποια η σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου και πως γίνεται η μέτρηση του τόξου;

Κατασκευάζουμε ένα κύκλο (O, ρ) και μια γωνία $\chi\hat{O}\psi$, της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο O του κύκλου.

Η γωνία αυτή λέγεται **επίκεντρη** γωνία.

Αν η πλευρά Οχ της γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α και η πλευρά Οψ στο σημείο Β, τότε:



Το τόξο ΑΒΓ που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας $\chi\hat{O}\psi$ λέγεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας $\chi\hat{O}\psi$.

Ως μέτρο ενός τόξου ορίζεται το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας, δηλαδή το μέτρο ενός τόξου το μετράμε σε μοίρες.

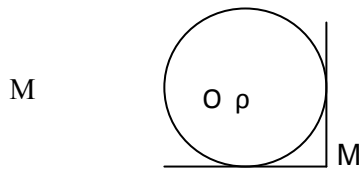
Σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δύο ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα αντίστοιχα τόξα.

Σε ένα κύκλο ή σε ίσους κύκλους, δύο ίσα τόξα έχουν ίσες τις επίκεντρες γωνίες τους.

12. Τι γνωρίζεις για τις θέσεις της ευθείας και του κύκλου;

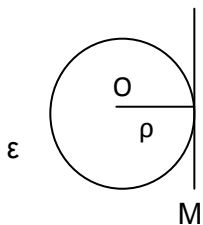
Όταν ευθεία και κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέμε ότι η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.

→ Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα ρ ($OM > \rho$), η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου.



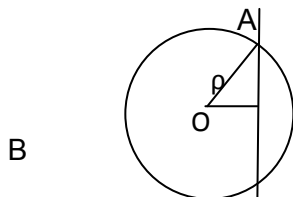
Όταν ευθεία και κύκλος έχουν ένα μόνο κοινό σημείο Μ, η ευθεία λέγεται **εφαπτόμενη του κύκλου** στο σημείο Μ.

→ Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι ίση με την ακτίνα ρ ($OM = \rho$), η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Μ.

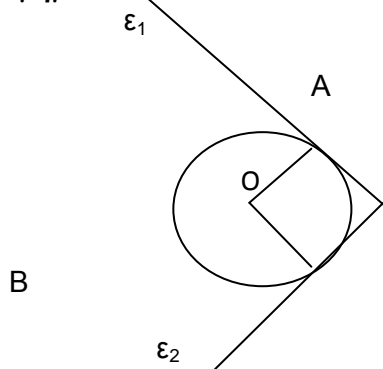


Όταν ευθεία και κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία Α και Β, η ευθεία λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** ή λέμε ότι η ευθεία τέμνει τον κύκλο στα Α και Β.

→ Όταν η απόσταση ΟΜ του κέντρου Ο από την ευθεία ε είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ ($OM < \rho$), η ευθεία είναι **τέμνουσα** του κύκλου.



Έστω M το σημείο που τέμνονται οι εφαπτόμενες. Τα ευθύγραμμα τμήματα AM και BM λέγονται *εφαπτόμενα τμήματα* του κύκλου.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

1. Τι ονομάζεται συμμετρία ως προς έναν άξονα και τι άξονας συμμετρίας;

- ✓ **Συμμετρικό σημείο** B ως προς ευθεία ϵ , είναι το σημείο Γ με το οποίο συμπίπτει το B , αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ϵ .
 - Κάθε σημείο μιας ευθείας ϵ είναι συμμετρικό του εαυτού του ως προς την ϵ .
- ✓ Δύο σχήματα (Σ_1) και (Σ_2) λέγονται **συμμετρικά** ως προς μία ευθεία ϵ , όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ϵ .
 - Τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα.
- ✓ **Άξονας συμμετρίας** σχήματος ονομάζεται η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο μέρη, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σχήμα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία αυτή.
 - Όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι τι ίδιο το σχήμα.
 - Οποιαδήποτε διάμετρος κύκλου είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου και του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

2. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος;

Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος λέγεται η ευθεία που είναι κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσον του.

- ✓ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος έχει ίσες αποστάσεις (ισαπέχει) από τα άκρα του.
- ✓ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετό του.
- ✓ Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας του.

3. Τι γνωρίζεται για την συμμετρία ως προς το σημείο και τι για το κέντρο συμμετρίας;

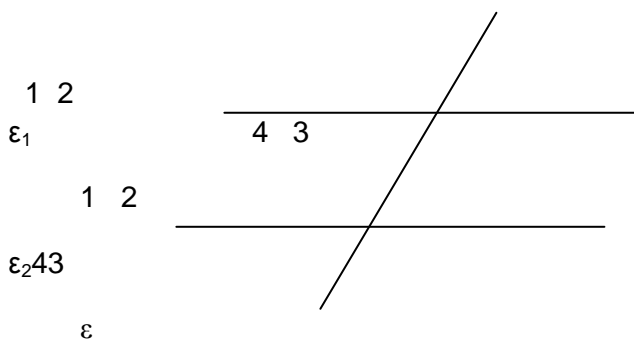
Συμμετρικό σημείο A ως προς κέντρο O , είναι το σημείο A' , με το οποίο συμπίπτει το A , αν περιστραφεί περί το O κατά 180° .

- Δύο σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς σημείο O , όταν το O είναι μέσο του τμήματος MM' .
- Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικά ως προς σημείο O , όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου ως προς το O .
- Τα συμμετρικά ως προς σημείο σχήματα είναι ίσα.

Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο του O , γύρω από το οποίο αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180° , συμπίπτει με το αρχικό. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο O .

- Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς το κέντρο αυτό είναι το ίδιο σχήμα.
- Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του καθώς και το αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.
- Οι συμμετρικές ως προς σημείο ευθείες, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

4. Τι γνωρίζετε για τις παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία;



- ✓ Οι γωνίες που βρίσκονται ανάμεσα στις ε_1 και ε_2 ονομάζονται «εντός» και όλες οι άλλες «εκτός».
- ✓ Οι γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας (ε) ονομάζονται «επί τα αυτά». (μέρη της ευθείας)
- ✓ Δύο γωνίες που βρίσκονται η μία στο ένα και η άλλη στο άλλο ημιεπίπεδο της ε , λέγονται μεταξύ τους «εναλλάξ».

Έτσι λοιπόν δημιουργείται ο εξής συνδυασμός γωνιών:

- α) εντός εναλλάξ β) εκτός εναλλάξ
- γ) εντός και επί τα αυτά δ) εκτός και επί τα αυτά.
- ε) εντός-εκτός εναλλάξ στ) εντός-εκτός και επί τα αυτά.

→ Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

→ Οι εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες είναι ίσες.

→ Οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές.

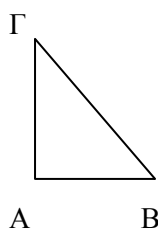
Όταν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη και οι εντός εναλλάξ γωνίες που σχηματίζονται είναι ίσες, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

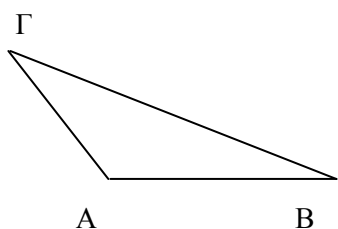
ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

1. Ποιά είναι τα στοιχεία του τριγώνου, τα είδη των τριγώνων;

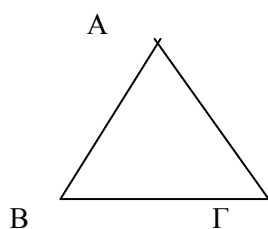
Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες του:



ορθογώνιο ($A=90^\circ$)

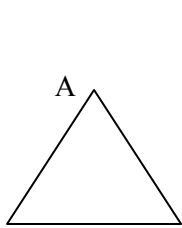


αμβλυγώνιο ($A > 90^\circ$)

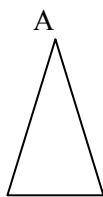


οξυγώνιο ($A, B, \Gamma < 90^\circ$)

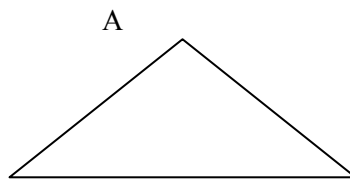
Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές του:



Ισόπλευρο ($AB=BG=GA$)



ισοσκελές ($AB=AG$)



σκαληνό (άνισες πλευρές)

- ✓ **Διάμεσος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- ✓ **Ύψος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.
- ✓ **Διχοτόμος** είναι το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή, το οποίο διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

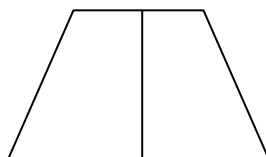
2. Τι γνωρίζεις για το άθροισμα ενός τριγώνου και τι για το ισοσκελές τρίγωνο;

- ✓ Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.
- ✓ Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:
 - Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.
 - Οι **προσκείμενες** γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- ✓ Σε κάθε **ισόπλευρο** τρίγωνο ισχύει ότι:
 - Κάθε **διάμεσος** είναι και διχοτόμος.
 - Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι **ίσες**.

3. Τι γνωρίζεις για το παραλληλόγραμμο, για το ορθογώνιο, για το ρόμβο, για το τετράγωνο, για το τραπέζιο, για το ισοσκελές τραπέζιο και ποιες οι ιδιότητες τους.

- ✓ **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.
 - Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί βάση του.
 - Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου.
 - Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ή απλά ορθογώνιο.
 - Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται ρόμβος.
 - Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται τετράγωνο.
- ✓ **Τραπέζιο** λέγεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του οποίου μόνο οι δύο πλευρές είναι παράλληλες.

A E B



Δ Z Γ

- Οι παράλληλες πλευρές $AB, \Gamma\Delta$ λέγονται βάσεις του τραpezίου. Η απόσταση των βάσεων λέγεται ύψος του τραpezίου.
- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες, λέγεται ισοσκελές τραπέζιο.

Ιδιότητες σε κάθε παραλληλόγραμμο:

- α) το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- β) Οι διαγωνίες του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- γ) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.

δ) Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Ιδιότητες του ορθογώνιου:

- α) Οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- β) οι μεσοκάθετες των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- γ) Οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται.

Ιδιότητες του ρόμβου:

- α) Οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- β) Οι ευθείες των διαγωνίων του είναι άξονες συμμετρίας
- γ) Οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται.
- δ) Οι διαγώνιές του είναι διχοτόμοι των γωνιών του.

Ιδιότητες του τετράγωνου:

- α) Οι ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- β) Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας
- γ) Οι διαγώνιές του είναι ίσες, κάθετες και διχοτομούνται.
- δ) Οι διαγώνιές του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του.

Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου:

- α) Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας και μεσοκάθετος στις βάσεις του.
- β) Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες είναι ίσες.