Άλγεβρα Β' Λυκείου

<u>Τριγωνομετρία</u>

Περιοδική συνάρτηση

Μια συνάρτηση fμε πεδίο ορισμού Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει $T \in R^*$, τέτοιος ώστε για κάθε $\chi \in A$ να ισχύουν:

i. $\chi + T \in A$, $\chi - T \in A$, ii. $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

Ο αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

<u>Η συνάρτηση ημίτονο</u>

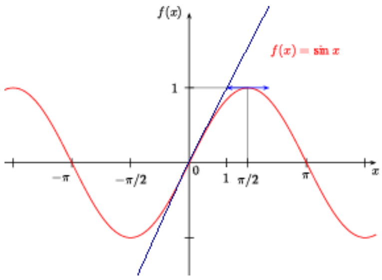
Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός χ αντιστοιχίζεται στο ημ(χrad) λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και την συμβολίζουμε με:

$$\eta\mu\chi = \eta\mu(\chi rad)$$

Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π διότι:

$$\eta\mu(2\pi + \chi) = \eta\mu\chi, \text{ για κάθε } \chi \in R$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα πλάτους 2π. Η μονοτονία της συνάρτησης αυτής στο διάστημα [0,2π] φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.



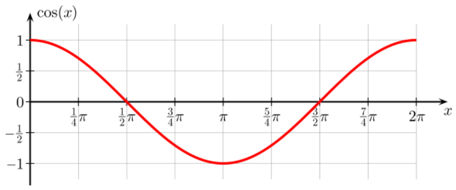
χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημχ	0	1	0	-1	0
		μέγιστο		ελάχιστο	

<u>Η συνάρτηση συνημίτονο</u>

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός χ αντιστοιχίζεται στο συν (χ rad) λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο** και τη συμβολίζουμε με:

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu(\chi rad)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, διότι: $\sigma\upsilon\nu(2\pi+\chi) = \sigma\upsilon\nu\chi$ για κάθε $\chi \in R$



χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνχ	1	0	-1	0	1
	μέγιστο		ελάχιστο		μέγιστο

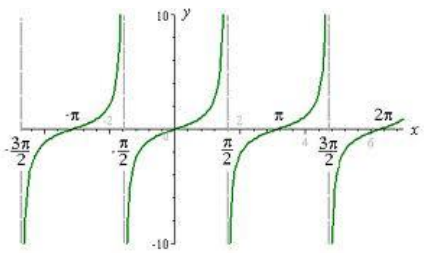
<u>Η συνάρτηση εφαπτομένη</u>

Η συνάρτηση εφαπτομένη ορίζεται ως το πηλίκο του ημιτόνου προς το συνημίτονο.

Είναι: $\mathbf{f(\chi) = \varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}}$με πεδίο ορισμού το $\mathbf{A = \{\chi \in R: \sigma\upsilon\nu\chi \neq 0\}}$

Η συνάρτηση εφχ είναι περιοδική με περίοδο π διότι: $\varepsilon\varphi(\pi+\chi) = \varepsilon\varphi\chi$, για κάθε $\chi \in A$. Άρα η γραφική της παράσταση επαναλαμβάνεται η ίδια σε κάθε διάστημα πλάτους π.

Όταν το χ πλησιάζει ("τείνει") στο $\frac{\pi}{2}$ με $\chi < \frac{\pi}{2}$ η εφχ τείνει στο $+\infty$ γι' αυτό λέμε ότι η ευθεία $\chi = \frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f με f(χ) = εφχ.



Οι συναρτήσεις f(χ) = ρημ(ωχ), όπου ρ,ω> 0 και g(χ) = ρσυν(ωχ), όπου ρ, ω > 0
Επειδή -1 ≤ ημχ ≤ 1 έχουμε -1 ≤ ημχ(ωχ) ≤ 1 και επειδή ρ > 0 είναι: -ρ ≤ ρημ(ωχ) ≤ ρ ⇔ -ρ ≤ f(χ) ≤ ρ.
Άρα η μέγιστη τιμή της f είναι το ρ και η ελάχιστη τιμή της είναι το -ρ.
Το ω καθορίζει την **περίοδο Τ** της f που είναι: **Τ =** $\frac{2\pi}{\omega}$

Τριγωνομετρικές εξισώσεις
ημχ = ημθ⇔ χ = 2κπ+θ ή χ = 2κπ+π-θ, κ∈Ζ
συνχ = συνθ⇔ χ = 2κπ ± θ, κ∈Ζ
εφχ = εφθ⇔ χ = κπ + θ, κ∈Ζ
σφχ = σφθ⇔ χ = κπ + θ, κ∈Ζ

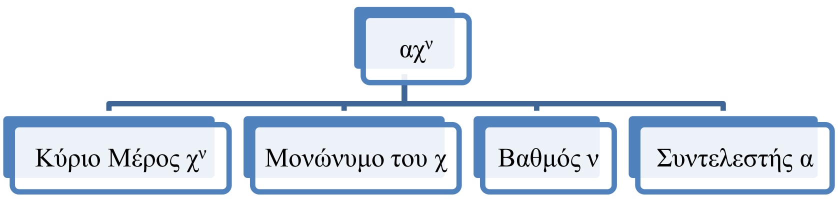
Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς	
συν(α+β) = συνασυνβ - ημαημβ	συν(α-β) = συνασυνβ + ημαημβ
ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ	ημ(α-β) = ημασυνβ - συναημβ
εφ(α+β) = $\frac{εφα + εφβ}{1 - εφαεφβ}$	εφ(α -= β) = $\frac{εφα - εφβ}{1 + εφαεφβ}$
σφ(α+β) = $\frac{σφασφβ - 1}{σφα + σφβ}$	σφ(α-β) = $\frac{σφασφβ + 1}{σφβ - σφα}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του 2α

1. ημ2α = 2ημασυνα
2α. συν2α = συν^{2}α - ημ^{2}α
2β. συν2α = 2συν^{2}α - 1
2γ. συν2α = 1- 2ημ^{2}α
3. εφ2α = $\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$
4. σφ2α = $\frac{σφ^2α-1}{2σφα}$
5. ημ2α = $\frac{2εφα}{1+εφ^2α}$
6. συν2α = $\frac{1-εφ^2α}{1+εφ^2α}$
7. εφ^{2}α = $\frac{1-συν2α}{1+συν2α}$
8. ημ^{2}α = $\frac{1-συν2α}{2}$
9. συν^{2}α = $\frac{1+συν2α}{2}$

Πολυώνυμα

Ορισμοί
Μονώνυμο του χ ονομάζουμε κάθε παράστασητης μορφής **αχ^ν** όπου α∈R, ν∈N* και χ μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το R.Μονώνυμο του χ λέμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.



Χαρακτηριστικά μονώνυμα
- Μηδενικό μονώνυμο λέγεται κάθε μονώνυμο με συντελεστή μηδέν.
- **Μονώνυμο μηδενικού βαθμού** λέγεται κάθε μονώνυμο του οποίου ο βαθμός είναι μηδέν.
- **Πολυώνυμο του χ** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής $α_νχ^ν+α_{ν-1}χ^{ν-1}+....+α_1χ+α_0$, όπου $α_ν$∈R και χ μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο R.

Ένα πολυώνυμο του χ το συμβολίζουμε συνήθως με P(χ), Q(χ), f(χ).

Χαρακτηριστικά πολυώνυμα
- **Σταθερά πολυώνυμα** λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί δηλαδή τα πολυώνυμα της μορφής P(χ) = $α_0·χ^0$
- **Μηδενικό πολυώνυμο** λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0.

Στοιχεία πολυωνύμου P(χ) = $α_νχ^ν+α_{ν-1}χ^{ν-1}+....+α_1χ+α_0$, $α_ν$ ≠ 0
- **Όροι:** λέγονται τα μονώνυμα $α_νχ^ν$,.....,$α_0$
- **Σταθερός όρος:** είναι ο όρος $α_0$ που δεν περιέχει χ.
- **Συντελεστές:** λέγονται οι πραγματικοί αριθμοί $α_ν,α_{ν-1},....,α_1,α_0$.
- **Βαθμός:** είναι ο εκθέτης ν,.
- **Αριθμητική τιμή για χ =κ :** λέγεται ο αριθμός P(ξ) = $α_νκ^ν+...+α_1κ+α_0$ που προκύπτει αν στο P(χ) αντικαταστήσουμε το χ με τον αριθμό κ.

- **Ρίζα:**Ένας αριθμός $\rho \in R$ λέγεται ρίζα του $P(\chi)$, αν και μόνο αν, $P(\rho) = 0$.

Ισότητα πολυωνύμων
Δυο πολυώνυμα του χ λέγονται ίσα, αν και μόνο αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομόβαθμων όρων τους είναι ίσοι.
Θεώρημα 1 (Ταυτότητα της διαίρεσης)
Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(\chi)$ και $\delta(\chi)$ με $\delta(\chi) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(\chi)$ και $\upsilon(\chi)$ τέτοια ώστε: $\Delta(\chi) = \delta(\chi) \cdot \pi(\chi) + \upsilon(\chi)$
όπου το $\upsilon(\chi)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό του $\delta(\chi)$.
Ισχύει $\Delta(\chi) = \delta(\chi) \cdot \pi(\chi) + \upsilon(\chi)$ όπου
$\Delta(\chi)$ διαιρετέος
$\delta(\chi)$ διαιρέτης
$\pi(\chi)$ πηλίκο
$\upsilon(\chi)$ υπόλοιπο και είναι βαθμού μικρότερου από το βαθμό του $\delta(\chi)$, ή $\upsilon(\chi) = 0$.
Παρατήρηση:
Η διαίρεση $\Delta(\chi) : \delta(\chi)$ λέγεται τέλεια αν $\upsilon(\chi) = 0$.
Τότε η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(\chi) = \delta(\chi) \cdot \pi(\chi)$ και το $\delta(\chi)$ λέγεται παράγοντας του $\Delta(\chi)$.
Θεώρημα 2
Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(\chi)$ με το $\chi-\rho$ είναι ο αριθμός $P(\rho)$.
Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $P(\chi) = (\chi-\rho)\,\pi(\chi) + P(\rho)$
Θεώρημα 3
Ένα πολυώνυμο $P(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi-\rho$, αν και μόνο αν , το ρ είναι ρίζα του $P(\chi)$.
Δηλαδή :$P(\chi) = (\chi-\rho)\,\pi(\chi) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$
Θεώρημα 4 (της ακέραιας ρίζας)
Αν το $P(\chi) = \alpha_v\chi^v+....\alpha_1\chi+\alpha_0$, όπου $\alpha_v,...\alpha_1,\alpha_0$ ακέραιοι, έχει ρίζα τον ακέραιο ρ, $\boldsymbol{\rho \neq 0}$ τότε αυτός διαιρεί τον α_0.

Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.)
Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) ονομάζουμε μια ακολουθία αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.
Τον αριθμό αυτόν τον συμβολίζουμε συνήθως με ω και τον λέμε **διαφορά** της προόδου.
Επομένως μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, αν και μόνο αν, ισχύει $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega \Leftrightarrow$
$\alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega,\ v \in N^*$

Ιδιότητες της αριθμητικής προόδου
- Ο νιοστός όρος α_v μιας αριθμητικής προόδου με **πρώτο όρο α_1** και **διαφορά ω** δίνεται από τον τύπο: $\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega$
- **Αριθμητικός μέσος** των αριθμών α, γ λέγεται ο αριθμός β, αν και μόνο αν, $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$
- Οι α,β,γ είναι διάδοχοι όροι μιας Α.Π. αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$
- Το **άθροισμα των ν πρώτων όρων** Α.Π. με διαφορά ω το συμβολίζουμε με: $S_v = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_v$

$$S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1+\alpha_v) \text{ ή } S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$$

Γεωμετρική πρόοδος
Γεωμετρική πρόοδο (Γ.Π.) ονομάζουμε μια ακολουθία αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.
- Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε συνήθως με λ και τον ονομάζουμε **λόγο** της προόδου.
- Σε μια γεωμετρική πρόοδο υποθέτουμε πάντα ότι $\alpha_1 \neq 0$ οπότε αφού είναι και $\lambda \neq 0$ ισχύει $\alpha_v \neq 0$ για κάθε $v \in N^*$
- Επομένως μια ακολουθία (α_v) είναι γεωμετρική πρόοδος αν και μόνο αν ισχύει: $\alpha_{v+1} = \alpha_v \cdot \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v}$ δηλαδή το πηλίκο δυο διαδοχικών όρων είναι σταθερό.

Ιδιότητες της Γεωμετρικής Προόδου
- Ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο:
- $\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$
- Γεωμετρικός μέσος των $\alpha,\gamma \neq 0$ λέγεται ο **θετικός αριθμός β,** αν και μόνο αν, $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$
- Οι α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι μιας Γ.Π. αν και μόνο αν, $\beta^2 = \alpha\gamma$
- Το άθροισμα των ν πρώτων όρων Γ.Π. με διαφορά λ το συμβολίζουμε $S_v = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_v$ και δίνεται από τον τύπο $S_v = \alpha_1\frac{\lambda^v-1}{\lambda-1}$ για $\lambda \neq 1$ και $S_v = v \cdot \alpha_1$ για $\lambda = 1$.

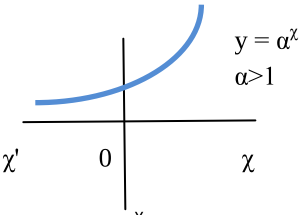
<u>Εκθετική - Λογαριθμική</u>
Ιδιότητες των δυνάμεων

Έστω α,β> 0 και χ_1, χ_2, χ∈R, τότε:		
$\alpha^{\chi_1} \cdot \alpha^{\chi_2} = \alpha^{\chi_1+\chi_2}$	$\frac{\alpha^{\chi_1}}{\alpha^{\chi_2}} = \alpha^{\chi_1-\chi_2}$	$(\alpha^{\chi_1})^{\chi_2} = \alpha^{\chi_1 \cdot \chi_2}$
$(\alpha\beta)^{\chi} = \alpha^{\chi} \cdot \beta^{\chi}$	$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\chi} = \frac{\alpha^{\chi}}{\beta^{\chi}}$	

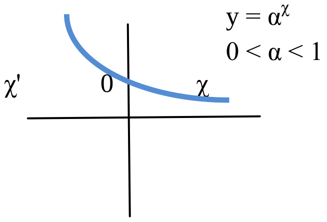
Επίσης ισχύουν: $\alpha^0 = 1$, $\alpha \in R^*$ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ μ∈Z, $\nu \in N^*$ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$, ν∈N, $\alpha \in R^*$
Αν χ > 0 ορίζουμε $0^{\chi} = 0$

Εκθετική συνάρτηση
Ορισμός
Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση α την συνάρτηση: f:R → R με $f(x) = \alpha^{x}$, όπου $0 < \alpha \neq 1$.
<u>Παρατήρηση:</u> Αν α = 1, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση **f(χ) = 1**.
Ιδιότητες
- Πεδίο ορισμού: A = R
- Σύνολο τιμών: το διάστημα **(0,+∞)**
- Μονοτονία

1) Αν α > 1 είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $\boldsymbol{\chi_1 < \chi_2}$ τότε $\boldsymbol{\alpha^{\chi_1} < \alpha^{\chi_2}}$
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο -∞ τον αρνητικό ημιάξονα Οχ'.



2) Αν 0 < α < 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:
Αν $\boldsymbol{\chi_1 < \chi_2}$ τότε $\boldsymbol{\alpha^{\chi_1} > \alpha^{\chi_2}}$
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο +∞ τον θετικό ημιάξονα Οχ.



Για την συνάρτηση $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ με $0 < \alpha \neq 1$ και χ∈R ισχύει $\boldsymbol{\alpha^{\chi_1} = \alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2}$ για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in R$.
Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0,1) ενώ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ'χ αφού $\boldsymbol{\alpha^{\chi} > 0}$ για κάθε χ∈R.

<u>Ο αριθμός e</u>
Καθώς το ν αυξάνει απεριόριστα, οι όροι της ακολουθίας $\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ προσεγγίζουν έναν άρρητο αριθμό που τον συμβολίζουμε με e και είναι **e≅2,718**.
Συμβολικά γράφουμε: $\boldsymbol{e = \lim_{\nu \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}$

Η έννοια του λογάριθμου
Έστω η εξίσωση $\boldsymbol{\alpha^{\chi} = \theta,\ 1 \neq \alpha,\ \theta > 0}$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(\chi) = \alpha^{\chi}$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Την μοναδική αυτή λύση την συμβολίζουμε με $\log_{\alpha}\theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση το α.**
Είναι δηλαδή: $\boldsymbol{\alpha^{\chi} = \theta \Leftrightarrow \chi = \log_{\alpha}\theta,\ 1 \neq \alpha > 0,\ \theta > 0}$. Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:
Ο $\log_{\alpha}\theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.
Από τον πιο πάνω ορισμό του λογάριθμου προκύπτει αμέσως ότι αν $1 \neq \alpha > 0$ τότε για κάθε χ∈R και για κάθε θ > 0 ισχύει:
$\log_{\alpha}\alpha^{\chi} = \chi$ και $\alpha^{\log_{\alpha}\theta} = \theta$. Έχουμε $\alpha^1 = \alpha$ άρα $\log_{\alpha}\alpha = 1$ Έχουμε $\alpha^0 = 1$ άρα $\log_{\alpha}1 = 0$.

Ιδιότητες λογαρίθμων
Αν $1 \neq \alpha > 0$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1,\theta_2,\theta > 0$ και κ∈R ισχύουν:
- $\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha}\theta_1 + \log_{\alpha}\theta_2$
- $\log_{\alpha}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_{\alpha}\theta_1 - \log_{\alpha}\theta_2$

- $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$

Δεκαδικοί αριθμοί

Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι.
Είναι δηλαδή **$10^x = \theta \Leftrightarrow \chi = \log\theta$, $\theta > 0$**. Για αυτούς τους λογάριθμους ισχύουν τα εξής:

- $\log 10^x = \chi$ και $10^{\log\theta} = \theta$
- $\log 10 = 1$ και $\log 1 = 0$
- $\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$
- $\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log\theta_1 - \log\theta_2$
- $\log\theta^\kappa = \kappa \cdot \log\theta$
- $\log\sqrt[\nu]{\theta} = \log\theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log\theta$όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$.

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί ονομάζονται **φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι**.
Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεατι με $\ln\theta$ και όχι με $\log_e\theta$. Είναι δηλαδή:
$e^x = \theta \Leftrightarrow \chi = \ln\theta$, $\theta > 0$
Για αυτούς τους λογάριθμους ισχύουν τα εξής:

- $\ln e^x = x$ και $e^{\ln\theta} = \theta$
- $\ln e = 1$ και $\ln 1 = 0$
- $\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$
- $\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ln\theta_1 - \ln\theta_2$
- $\ln\theta^\kappa = \kappa \cdot \ln\theta$
- $\ln\sqrt[\nu]{\theta} = \ln\theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\ln\theta$ όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$.

Αλλαγή βάσης

Αν $1 \neq \alpha > 0$ και $1 \neq \beta > 0$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_\beta\theta = \frac{\log_\alpha\theta}{\log_\alpha\beta}$