ΑΙΧΜΗ GROUP 3-4
Εκπαιδευτικός όμιλος

Επανάληψη σε προηγούμενες γνώσεις

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Τετράγωνο αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Τετράγωνο διαφοράς	$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
Κύβος αθροίσματος	$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
Κύβος διαφοράς	$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά	$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
Διαφορά κύβων	$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$
Άθροισμα κύβων	$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1^{o}Βήμα: Κοιτάζω αν όλοι οι όροι έχουν κοινό παράγοντα.

2^{o}Βήμα:Κοιτάζω αν ανά δύο ή ανά τρεις οι όροι μου έχουν κοινό παράγοντα (ομαδοποίηση).Για να συνεχίζει όμως η ομαδοποίηση θα πρέπει και οι καινούριοι όροι να έχουν κοινό παράγοντα.

3^{o}Βήμα: Κοιτάζω αν υπάρχει ανάπτυγμα ταυτότητας.

4^{o}Βήμα: Κοιτάζω αν έχω τριώνυμο.

5^{o} Βήμα: εφαρμόζω μέθοδο HORNER.

6^{o}Βήμα: Κοιτάζω αν υπάρχει κάποιο κομμάτι ταυτότητας.Τότε προσθέτω και αφαιρώ το κομμάτι που μου λείπει, έτσι ώστε να δημιουρηθεί η ταυτότητα και έπειτα να συνεχιστεί η παραγοντοποίηση.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο είναι

$\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha \neq 0$

Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$			**Παραδείγματα**
$\alpha \neq 0$		**Έχει μοναδική λύση την $x = -\frac{\beta}{\alpha}$**	**$4x + 3 = 0$ ή $4x = -3$ ή $x = -\frac{3}{4}$**
$\alpha = 0$	**$\beta \neq 0$**	**Δεν έχει λύση (αδύνατη)**	**$0x = 2$ (αδύνατη)**
	$\beta = 0$	**Έχει λύση κάθε αριθμό (ταυτότητα)**	**$0x = 0$ (ταυτότητα)**

Η γενική μορφή μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο είναι

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$,

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	**Συμπεράσματα από τη λύση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$**	
	$\Delta > 0$	**Έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$**
	$\Delta = 0$	**Έχει μία διπλή λύση, την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$**
	$\Delta < 0$	**Δεν έχει λύση (αδύνατη)**

Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1η Λείπει το γ: Βγάζω κοινό παράγοντα το χ και το φέρνω στη μορφή $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$

2η Λείπει το βχ: Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους και λύνω την εξίσωση της μορφής $\chi^2 = \alpha$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για να λυθεί μία εξίσωση που είναι μεγαλύτερη του δευτέρου βαθμού πρέπει να τα φέρω όλα στην αριστερή πλευρά και δεξιά το μηδέν και έπειτα με την παραγοντοποίηση να τη φέρω στη μορφή:

$$\boldsymbol{A \cdot B \cdot \Gamma = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ή } B = 0 \text{ ή } \Gamma = 0}$$

Τριγωνομετρικές εξισώσεις
ημχ = ημθ ⇔ χ = 2κπ+θ ή χ = 2κπ+π-θ, κ∈Ζ
συνχ = συνθ ⇔ χ = 2κπ ± θ, κ∈Ζ
εφχ = εφθ⇔ χ = κπ + θ, κ∈Ζ
σφχ = σφθ ⇔ χ = κπ + θ, κ∈Ζ

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Για τη λύση εξισώσεων με απόλυτα χρησιμοποιούμε τα εξής:

1. $|\chi| = \alpha$, $\alpha > 0 \iff \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$ **2.** $|\chi| = |\alpha| \iff \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$

3. $|\chi|^2 = \chi^2$ **4.** $|\chi| = \alpha$, $\alpha < 0$ είναι αδύνατη.

Από την διερεύνηση της ανίσωσης **αχ+β >0**, όπου α,β είναι παράμετροι, προκύπτουν τα εξής:

- **Αν α > 0** τότε $\alpha\chi+\beta > 0 \iff \alpha\chi > -\beta \iff \chi > -\frac{\beta}{\alpha}$ δηλαδή η ανίσωση αχ+β > 0 έχει τις λύσεις:
  $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$
- **Αν α < 0** τότε $\alpha\chi+\beta > 0 \iff \alpha\chi > -\beta \iff \chi < -\frac{\beta}{\alpha}$ δηλαδή η ανίσωση αχ+β > 0 έχει τις λύσεις:
  $\chi < -\frac{\beta}{\alpha}$
- **Αν α = 0 και β> 0** τότε η ανίσωση γίνεται $0\chi+\beta >0 \iff \beta > 0$ που ισχύει. Άρα η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό χ.
- **Αν α = 0 και β ≤ 0** τότε η ανίσωση γίνεται: $0\chi +\beta > 0 \iff \beta > 0$ που είναι αδύνατη. Άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

Μορφή και πρόσημο της $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, α≠0

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Δ > 0, τότε είναι $f(\chi) = \alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)$ **(1)**.

χ	$-\infty$ χ_1 χ_2 $+\infty$		
F(x)	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α

2. Αν Δ = 0 τότε $f(\chi) = \alpha\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ οπότε το f(χ) είναι ομόσημο του α για κάθε $\chi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Χ	$-\infty$ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ $+\infty$	
F(x)	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α

3. Αν Δ < 0 τότε $f(\chi) = \alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και επειδή η παράσταση στην αγκύλη είναι θετική για κάθε χεR, το f(χ)

Χ	$-\infty$ $+\infty$
F(x)	Ομόσημο του α

είναι ομόσημο του α σε όλο το R.

Ανισώσεις δευτέρου βαθμού και άνω:

Τα πάω όλα σε μία μεριά, έτσι ώστε να μείνει το μηδέν από την άλλη και κάνω παραγοντοποίηση.Έτσι το φέρνω στην μορφή $\boldsymbol{A \cdot B \cdot \Gamma \lesseqgtr 0}$

Έπειτα παίρνω έναν-έναν παράγοντα και λύνω μία μία ανίσωση **Α>0 ή Α<0** όπου Α,Β,Γ το πολύ εώς δευτέρου βαθμού. Βρίσκοντας τις λύσεις, τις τοποθετώ στον άξονα και για τον κάθε έναν παράγοντα παίρνω το πρόσημό του από τις ανισώσεις που έχω λύσει και στο τέλος κάνω το γινόμενο.

Στις ανισώσεις που περιέχουν απόλυτα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:
1. $|\chi| \leq \theta$, $\theta > 0 \iff -\theta \leq \chi \leq \theta$ **2.** $|\chi| \geq \theta$, $\theta > 0 \iff \chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$
Αν $\theta < 0$: **Η ανίσωση |χ| <θ είναι αδύνατη (αφού |χ| ≥ 0)**
Η ανίσωση |χ| > θ, ισχύει για κάθε χεR

ΡΙΖΕΣ

$$\sqrt{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\beta}^2 = \boldsymbol{\alpha}\,, \boldsymbol{\alpha} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0}$$

Για να διώξουμε τις ρίζες έχουμε τουε εξής τρόπους:

Α) Όταν υπάρχει εξίσωση με ρίζα υψώνω και τα δύο μέλη στο τετράγωνο αρκεί και τα δύο μέλη να είναι θετικά.

Β) Όταν έχω ρίζα μόνη της στον παρονομαστή ενός κλάσματος πολλαπλασιάζω και τον παρονομαστή και τον αριθμητή με τη ρίζα για να φύγει.

Γ) Όταν έχω $\sqrt{\ldots\ldots} - \sqrt{\ldots\ldots}$, $\sqrt{\ldots\ldots} + \sqrt{\ldots\ldots}$, $\sqrt{\ldots\ldots} - \alpha$, $\sqrt{\ldots\ldots} + \alpha$

τότε για να μπορέω να διώξω την ρίζα πολ/ζω και διαιρώ με την συζυγή παράσταση. Λέγοντας συζυγή παράσταση εωωοούμε το κομμάτι που λείπει από την ταυτότητα **(α + β)(α - β) = $\boldsymbol{\alpha^2 - \beta^2}$**

Εκθετική συνάρτηση

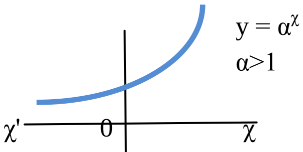
Ορισμός
Ονομάζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση α την συνάρτηση: f:R → R με $f(x) = \alpha^x$, όπου $0 < \alpha \neq 1$.
<u>Παρατήρηση:</u> Αν α = 1, τότε έχουμε την σταθερή συνάρτηση **f(χ) = 1**.
Ιδιότητες

- Πεδίο ορισμού: Α = R
- Σύνολο τιμών: το διάστημα **(0,+∞)**
- Μονοτονία

i. Αν α > 1 είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε για κάθε $χ_1,χ_2 \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $\boldsymbol{χ_1 < χ_2}$ τότε $\boldsymbol{α^{χ_1} < α^{χ_2}}$

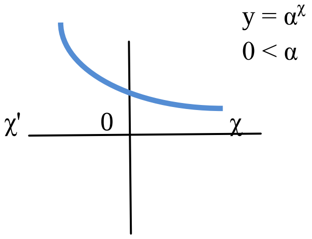
Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο -∞ τον αρνητικό ημιάξονα Οχ'.



ii. Αν 0 < α < 1 είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε για κάθε $χ_1,χ_2 \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

Αν $\boldsymbol{χ_1 < χ_2}$ τότε $\boldsymbol{α^{χ_1} > α^{χ_2}}$

Στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση της f έχει ασύμπτωτη στο +∞ τον θετικό ημιάξονα Οχ.



Για την συνάρτηση $f(χ) = α^χ$ με $0 < α \neq 1$ και $χ \in R$ ισχύει $\boldsymbol{α^{χ_1} = α^{χ_2} \Leftrightarrow χ_1 = χ_2}$ για κάθε $χ_1,χ_2 \in R$.

Επίσης η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο (0,1) ενώ δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα χ'χ αφού $\boldsymbol{α^χ > 0}$ για κάθε $χ \in R$.

Η έννοια του λογάριθμου

Έστω η εξίσωση $\boldsymbol{α^χ = θ,\ 1 \neq α,\ θ > 0}$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση αφού η εκθετική συνάρτηση $f(χ) = α^χ$ είναι γνησίως μονότονη και το θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Την μοναδική αυτή λύση την συμβολίζουμε με $\log_α θ$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση το α.**

Είναι δηλαδή: $\boldsymbol{α^χ = θ \Leftrightarrow χ = \log_α θ,\ 1 \neq α > 0,\ θ > 0}$. Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_α θ$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ.

Από τον πιο πάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι αν $1 \neq α > 0$ τότε για κάθε $χ \in R$ και για κάθε $θ > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$. Αφού είναι $\alpha^1 = \alpha$ τότε $\log_\alpha \alpha = 1$ Αφού είναι $\alpha^0 = 1$ τότε $\log_\alpha 1 = 0$.

Ιδιότητες λογαρίθμων

Αν $1 \neq \alpha > 0$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ **2.** $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$ **3.** $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$

Παρατήρηση 1

Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta} = \theta^{\frac{1}{\nu}}$ έχουμε: $\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log_\alpha \theta$.

Παρατήρηση 2

Η ιδιότητα 1 ισχύει γενικά για ν θετικούς αριθμούς $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_\nu$. Δηλαδή:
$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2 ..... \theta_\nu) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 + ... + \log_\alpha \theta_\nu$

Παρατήρηση 3

Από την ιδιότητα 2 προκύπτει ότι: $\log_\alpha \frac{1}{\theta} = -\log_\alpha \theta$.

Δεκαδικοί αριθμοί

Οι λογάριθμοι με βάση το 10 ονομάζονται δεκαδικοί ή κοινοί λογάριθμοι.
Είναι δηλαδή **$10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log\theta$, $\theta > 0$**. Για αυτούς τους λογάριθμους ισχύουν τα εξής:

1. $\log 10^x = x$ **και** $10^{\log\theta} = \theta$ **2.** $\log 10 = 1$ **και** $\log 1 = 0$ **3.** $\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$
4. $\log\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log\theta_1 - \log\theta_2$ **5.** $\log\theta^\kappa = \kappa \cdot \log\theta$ **6.** $\log\sqrt[\nu]{\theta} = \log\theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\log\theta$
όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$.

Φυσικοί λογάριθμοι

Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί ονομάζονται **φυσικοί ή νεπέρειοι λογάριθμοι**.
Ο νεπέριος λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεατι με $\ln\theta$ και όχι με $\log_e\theta$. Είναι δηλαδή:
$e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln\theta$, $\theta > 0$

Για αυτούς τους λογάριθμους ισχύουν τα εξής:

1. $\ln e^x = x$ **και** $e^{\ln\theta} = \theta$ **2.** $\ln e = 1$ **και** $\ln 1 = 0$ **3.** $\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$ **4.** $\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \ln\theta_1 - \ln\theta_2$
5. $\ln\theta^\kappa = \kappa \cdot \ln\theta$ **6.** $\ln\sqrt[\nu]{\theta} = \ln\theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\ln\theta$ **όπου $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in R$.**

Εκθετικές εξισώσεις :

Όταν έχω εξισώσεις οι οποίες είναι της μορφής $\boldsymbol{\alpha^x = \beta ή \alpha^{f(x)} = \beta ή \alpha^{f(x)} = \beta^{f(x)}}$

τότε ο σκοπός μου είναι να γράψω το β ως μία δύναμη που να έχει βάση το α.
Όταν έχω εκθετικές εξισώσεις της μορφής $f(\alpha^x)=0$ δηλαδή μία παράσταση μία παράσταση που περιέχει μια συγκεκριμένη δύναμη , θέτω $\alpha^\chi = y$όπου y>0 και λύνω την εξίσωση με άγνωστο τον y.