ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση και τι αλγεβρική παράσταση;

Αριθμητική παράσταση ονομάζεται η παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς.
Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται η παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ισοτήτων;

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΤΗΤΩΝ
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

3. Τι ονομάζουμε αναγωγή ομοίων όρων;

Αναγωγή ομοίων όρων ονομάζεται η αντικατάσταση των ομοίων όρων με το άθροισμα τους.

4. Τι ονομάζουμε εξίσωση και τι λύση ή ρίζα της εξίσωσης;

Εξίσωση ονομάζεται η ισότητα που περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή
Λύση ή ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση

5. Με ποιο τρόπο επιλύουμε μία εξίσωση;

- ✓ Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρανομαστών
- ✓ Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ και διαγράφουμε τους παρανομαστές
- ✓ Απαλείφουμε τις παρενθέσεις κάνοντας πράξεις
- ✓ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
- ✓ Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου

Αν έχουμε $0x = 0$ η εξίσωση λέγεται ***ταυτότητα***
Αν έχουμε $0x = \alpha\ (\alpha \neq 0)$ η εξίσωση είναι ***αδύνατη***

6. Τι ονομάζουμε ανίσωση και με ποιόν τρόπο επιλύουμε μία ανίσωση;

Ανίσωση ονομάζεται η ανισότητα που περιέχει έναν άγνωστο x
Για να επιλύσουμε μία ανίσωση βρίσκουμε το ***ΕΚΠ*** των παρανομαστών
Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ και ***διαγράφουμε*** τους παρανομαστές
Απαλείφουμε τις παρενθέσεις κάνοντας πράξεις
Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
Κάνουμε ***αναγωγή*** ομοίων όρων
Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου (Αν ο συντελεστής είναι θετικός, τότε διαιρούμε απευθείας. Αν ο συντελεστής είναι αρνητικός, ξαναγράφουμε την ανισότητα με αντίθετη φορά συμβόλου και διαιρούμε)

7. **Ποιες είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;**

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ
Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$
Αν $\alpha < \beta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma < \beta - \gamma$
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. **Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;**

Τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού α ($\sqrt{\alpha}$) είναι ένας θετικός αριθμός x που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α.

Δηλαδή :

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha > 0$ τότε $x > 0$ και $x^2 = \alpha$

Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

Επειδή $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{ο}$
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2. **Τι ονομάζουμε συνάρτηση;**

✓ Συνάρτηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία σε κάθε τιμή μίας μεταβλητής x αντιστοιχεί μία μόνο τιμή μίας μεταβλητήςy.

✓ Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σ’ ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και αντίστροφα, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

✓ Κάθε σημείο του άξονα xx΄ έχει τεταγμένη (y) 0

✓ Κάθε σημείο του άξονα yy΄ έχει τετμημένη (x) 0

y

$2^{ο}$ τεταρτημόριο $1^{ο}$ τεταρτημόριο

x< 0, y>0 x>0, y>0

xx΄

$3^{ο}$ τεταρτημόριο $4^{ο}$ τεταρτημόριο

x< 0, y<0 x>0, y<0

3. **Με ποια συνάρτηση μπορούμε να εκφράσουμε δύο ανάλογα ποσά x, y;**

Αν ο ***σταθερός λόγος*** $\frac{y}{x}$ δύο ανάλογων ποσών x και y είναι ίσος με α, τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από την ισότητα **y = αx**

Δύο ποσά λέγονται ***ανάλογα*** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

4.Τι μορφή έχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης y = αx;

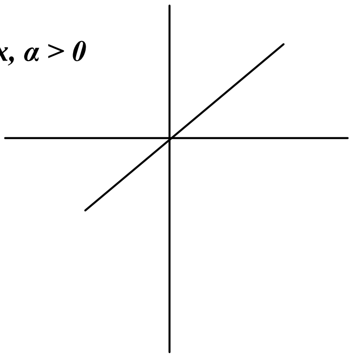
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)

yy

y = αx, α > 0

xx΄

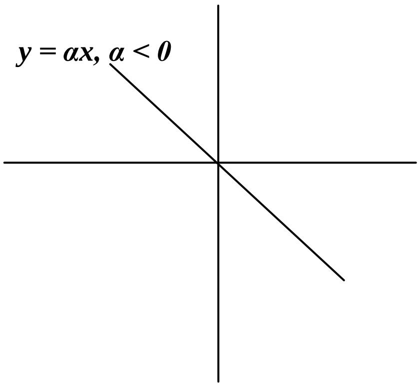
xx΄



y΄

y΄

y = αx, α < 0



5.Τι ονομάζουμε κλίση μιας ευθείας y = αx;

Κλίση μιας ευθείας y = αx είναι ο λόγος $\alpha = \frac{y}{x}$ *για x≠0*

6. Τι μορφή έχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = αx + β;

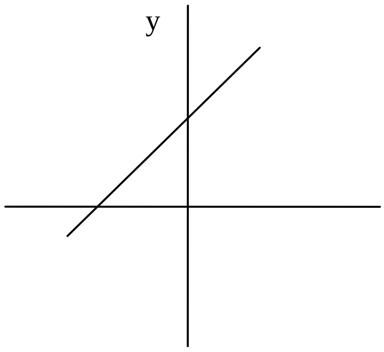
Η γραφική παράσταση ***y = αx + β με β ≠ 0***, είναι μία ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση y = αx,

y = αx + β

που διέρχεται από το σημείο (Ο,β) του άξονα yy΄

y

xx΄



y΄

7. Ποια είναι η κλίση μίας ευθείας y = αx + β;

Κλίση ευθείας **y = αx + β** είναι ο αριθμός α

8. Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες κάθε ευθεία της μορφής y = αx + β;

Κάθε ευθεία της μορφής ***y = αx + β με α ≠ 0 και β ≠ 0***, τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο ($-\frac{\beta}{\alpha}$, 0) τον άξονα yy΄ στο σημείο (0,β)

Μια εξίσωση της μορφής ***αx+ βy = γ με α ≠ 0 ή β ≠ 0*** παριστάνουν ευθεία

9. Με ποια συνάρτηση μπορούμε να εκφράσουμε δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά x,y;

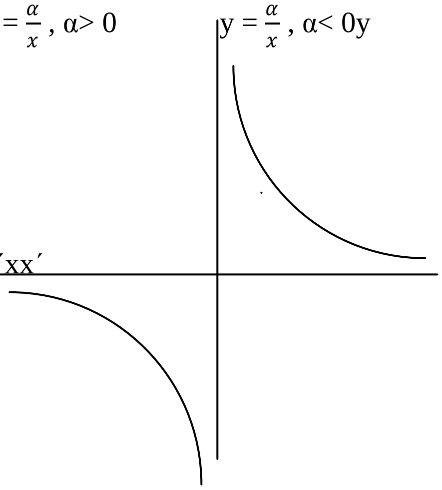
Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των x και y, τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$

10.Τι μορφή έχει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y= \frac{\alpha}{x}$, όπου $\alpha \neq 0$ λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται :

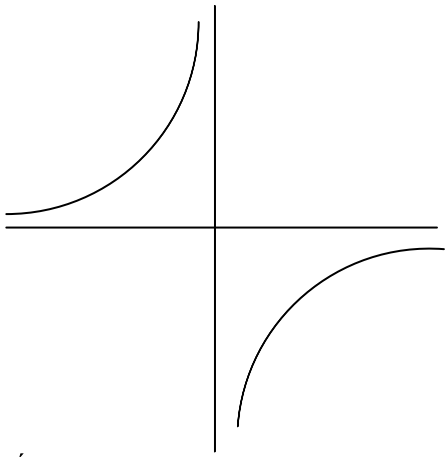
Στο 1ο και 3οτεταρτημόριο των αξόνων,όταν α>0 Στο 2ο και 4οτεταρτημόριο των αξόνων, όταν α<0

yy = $\frac{\alpha}{x}$, α> 0 y = $\frac{\alpha}{x}$, α< 0y



xx΄xx΄

y΄



y΄

Η γραφική παράσταση της υπερβολής έχει :

Κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

Άξονα συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες y = xκαιy = -x

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο
ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1.Τι ονομάζεται πληθυσμός;

Πληθυσμός ονομάζεται το σύνολο όλων των στοιχείων του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους

2.Τι ονομάζεται μεταβλητή;

Μεταβλητή ονομάζεται το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού.

3.Τι ονομάζεται δείγμα ενός πληθυσμού και τι δειγματοληψία και μέγεθος ενός δείγματος ;

Δείγμα ενός πληθυσμού ονομάζεται ένα υποσύνολο του πληθυσμού από το οποίο συγκεντρώνουμε πληροφορίες.

Δειγματοληψία ονομάζεται η συγκέντρωση και η καταγραφή από ένα δείγμα του χαρακτηριστικού τους που μας ενδιαφέρει
Μέγεθος ενός δείγματος ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του

4.Ποιό δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό;
Αντιπροσωπευτικό δείγμα είναι εκείνο το μέρος του πληθυσμού που είναι επιλεγμένο, έτσι ώστε κάθε μονάδα του να έχει την ίδια πιθανότητα να επιλέγει.

5.Τι είναι απογραφή του πληθυσμού;
Απογραφή του πληθυσμού είναι η συγκέντρωση και η καταγραφή από όλα τα άτομα του πληθυσμού, του χαρακτηριστικού που μας ενδιαφέρει

6.Πώς μπορούμε να παρουσιάσουμε τα στατιστικά δεδομένα;
Η παρουσίαση των στατιστικών δεδομένων γίνεται με πίνακες και διαγράμματα
Είδη διαγραμμάτων: **Εικονόγραμμα**
Ραβδόγραμμα
Κυκλικό διάγραμμα
Χρονόγραμμα

7.Τι ονομάζουμε παρατηρήσεις και τι είναι διαλογή των παρατηρήσεων;
Παρατηρήσεις ονομάζονται όλα τα ίδια ή διαφορετικά αποτελέσματα μίας μεταβλητής.
Διαλογή των παρατηρήσεων ονομάζεται η διαδικασία με την οποία, εξετάζοντας με τη σειρά το σύνολο των παρατηρήσεων, καταγράφουμε κάθε παρατήρηση με μία γραμμή στην αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής.

8.Τι είναι η συχνότητα μιας τιμής και τι σχετική συχνότητα;
Συχνότητα μίας τιμής είναι ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή στο σύνολο των παρατηρήσεων
Σχετική συχνότητα μίας τιμής είναι το πηλίκο της συχνότητας της τιμής αυτής προς το σύνολο όλων των παρατηρήσεων. Η σχετική συχνότητα εκφράζεται με μορφή ποσοστού.

9.Τι ονομάζεται η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων μίας μεταβλητής σε κλάσεις;
Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής σε κλάσεις ονομάζεται η διαδικασία ταξινόμησης των παρατηρήσεων σε μικρό πλήθος ομάδων, έτσι ώστε κάθε παρατήρηση να ανήκει σε μία μόνο ομάδα

10.Τι ονομάζεται κλάση; Ποιο είναι το πλάτος της και ποιο το κέντρο της;
Κλάση ονομάζεται καθεμία από τις ομάδες παρατηρήσεων που δημιουργήσαμε.
Πλάτος της κλάσης είναι η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο άκρο της κλάσης.
Συνήθως τις παρατηρήσεις τις χωρίζουμε σε κλάσεις ίσου μήκους.
Κέντρο μίας κλάσης είναι το ημιάθροισμα των άκρων της κλάσης

11. Τι ονομάζουμε εύρος των παρατηρήσεων;
Εύρος των παρατηρήσεων ονομάζεται η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη τιμή

12. Πως παρουσιάζουμε τις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις;

Τις ομαδοποιημένες παρατηρήσεις τις παρουσιάζουμε με ιστόγραμμα συχνοτήτων ή ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων

13.Ποια είναι η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων;
Μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων είναι το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήσεων προς το πλήθος των παρατηρήσεων

14.Με ποια διαδικασία βρίσκουμε την διάμεσο μίας κατανομής;
Για να βρούμε την διάμεσο μίας κατανομής τότε:
Γράφουμε τις παρατηρήσεις με αύξουσα σειρά
Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό, η διάμεσος είναι η μεσαία τιμή
Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων τιμών

15.Με ποια διαδικασία βρίσκουμε τη μέση τιμή μιας ομαδοποιημένης κατανομής;
Για να βρούμε τη μέση τιμή μίας ομαδοποιημένης κατανομής τότε:
- ✓ Βρίσκουμε τα κέντρα των κλάσεων
- ✓ Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής
- ✓ Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα
- ✓ Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.Τι ονομάζεται εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας και ποιες οι μονάδες μέτρησης επιφανειών;
Το ***εμβαδόν*** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.
Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς 1m. Το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού λέγεται τετραγωνικό μέτρο και το συμβολίζουμε με $1m^2$. Το τετραγωνικό μέτρο είναι η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού.

Υπάρχουν οι ***υποδιαιρέσεις*** και τα πολλαπλάσια του m^2, που για να πάμε από μια μεγάλη μονάδα σε μικρή, πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό, ενώ για να πάμε από μια μικρή σε μεγαλύτερη, διαιρούμε με κατάλληλο αριθμό.

km^2

· 1000000 : 1000000

m^2

· 100 : 100

dm^2

· 100 100

cm^2

· 100 100

mm^2

2. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **τετραγώνου** πλευράς α ισούται με $α^2$.
  Ε = $α^2$
- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **ορθογωνίου** με πλευρές α, β ισούται με α · β.
  Ε = α · β
- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **παραλληλογράμμου** είναι ίσο με το γινόμενο μίας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

  $$\mathbf{Ε = β \cdot υ}$$
- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **τριγώνου** είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

  $$\mathbf{Ε} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{β \cdot υ}$$
- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **ορθογωνίου τριγώνου** είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

  $\mathbf{Ε} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{β \cdot γ}$
- ✓ Το **εμβαδόν** ενός **τραπεζίου** είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.

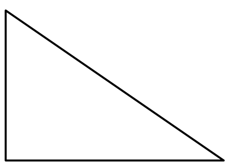
  $\mathbf{Ε} = \dfrac{(β+Β)υ}{2}$

3.Τι γνωρίζεις για το πυθαγόρειο θεώρημα;

Πυθαγόρειο θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

$α^2 = β^2 + γ^2$ Γ



β

Α γ Β

Αντίστροφο Πυθαγόρειου θεωρήματος

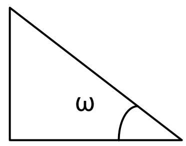
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1.Τι γνωρίζεις για την εφαπτομένη οξείας γωνίας;
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη** της γωνίας ω.

Γ

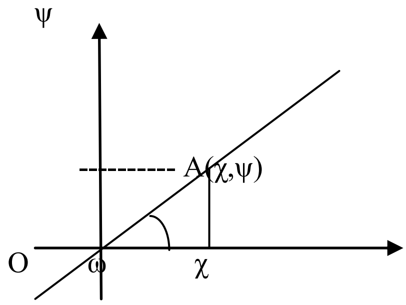
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απεναντι καθετη πλευρα της γωνιας } \omega}{\text{προσκειμενη καθετη πλευρα της γωνιας } \omega}$$



Α Β

Η κλίση της ευθείας ψ = αχ

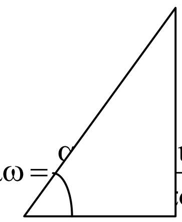
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{\psi}{\chi} = \alpha$$



Η ***κλίση α*** της ευθείας με εξίσωση ψ = αχ είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.

2.Τι γνωρίζεις για το ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω.

Β

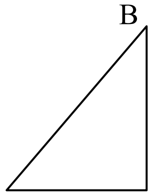


$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απεναντι καθετη πλευρα}}{\text{υποτεινουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

Γ Α

Ο ***λόγος*** που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω.

Β



$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\iota\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\alpha\theta\varepsilon\tau\eta\ \pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\alpha}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\iota\nu o\upsilon\sigma\alpha} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$$

Γ A

- Ισχύουν: $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$
- Ισχύει: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

3.Τι γνωρίζεις για τις μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60° ;

Όταν μια οξεία γωνία αυξάνεται, τότε: αυξάνεται το ημίτονό της, ελαττώνεται το συνημίτονό της και αυξάνεται η εφαπτομένη της.

Προκύπτει ότι:

- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.
- Αν δύο οξείες γωνίες έχουν ίσες εφαπτόμενες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

Ισχύουν:

	30°	45°	60°
Ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

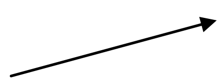
4.Τι γνωρίζεις για την έννοια του διανύσματος;

- Τα μεγέθη τα οποία καθορίζονται μόνο από την αριθμητική τους τιμή λέγονται **βαθμωτά** ή **μονόμετρα**.
- Τα μεγέθη τα οποία για να καθοριστούν χρειάζεται η αριθμητική τους τιμή, καθώς και η κατεύθυνσή τους (δηλαδή η φορά και η διεύθυνσή τους) λέγονται **διανυσματικά**.

  Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με διανύσματα που συμβολίζονται με βέλη έχοντας ένα σημείο Α που είναι η αρχή του διανύσματος και ένα σημείο Β που είναι το πέρας (τέλος) του διανύσματος.

  Το διάνυσμα, τότε, συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

  Β ε



Α$\vec{\alpha}$

Ένα διάνυσμα έχει τα εξής στοιχεία:

- ✓ **Διεύθυνση**, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.
- ✓ **Φορά**, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β ($\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το Β και πέρας το Α ($\overrightarrow{BA}$).
- ✓ **Μέτρο**, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, το οποίο συμβολίζουμε με $\left|\overrightarrow{AB}\right|$Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.
- → Δύο **διανύσματα** λέγονται **ίσα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα.
- → Δύο **διανύσματα** είναι **αντίθετα**, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά.

5. Άθροισμα – διαφορά διανυσμάτων

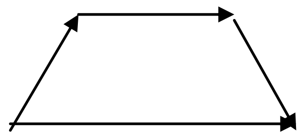
Έχουμε δύο μεθόδους για να βρίσκουμε το άθροισμα διανυσμάτων:

Α. Η μέθοδος του πολυγώνου

Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν όλα διαδοχικά.

Το άθροισμα των $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ θα είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.

$\vec{\beta}$



$\vec{\alpha}\vec{\gamma}$

$\vec{\delta}$

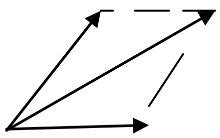
Β. Η μέθοδος του παραλληλογράμμου.

Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$

Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$και $\vec{\beta}$

$\vec{\alpha}\vec{\delta}$

$\vec{\beta}$



Διαφορά διανυσμάτων.

Η διαφορά δύο διανυσμάτων$\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συμβολίζεται με$\overrightarrow{AB}$ - $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$και ορίζεται ως άθροισμα του $\overrightarrow{AB}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$δηλαδή με το$\overrightarrow{\Delta\Gamma}$:

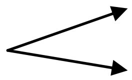
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} .$$

Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή.

Για να αφαιρέσουμε δύο διανύσματα με κοινή αρχή, προσθέτουμε στο $\overrightarrow{OA}$ το αντίθετο του$\overrightarrow{OB}$, δηλαδή το$\overrightarrow{BO}$. Τα διανύσματα $\overrightarrow{BO}$ και $\overrightarrow{OA}$ είναι διαδοχικά. Το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ είναι η διαφορά του $\overrightarrow{OB}$ από το$\overrightarrow{OA}$.

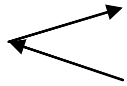
A

$\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{OB}$ O B



A

$\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{BO}$= $\overrightarrow{BO}$ + $\overrightarrow{OA}$ O

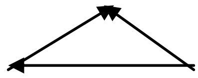


B

$\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{OB}$= $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{BO}$A

= $\overrightarrow{BO}$ + $\overrightarrow{OA}$

= $\overrightarrow{BA}$ O B



Ένα διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Συμβολίζεται με $\vec{0}$ και παριστάνει σημείο. Το μηδενικό διάνυσμα δεν έχει ούτε διεύθυνση, ούτε φορά, ενώ το μέτρο του είναι 0, $|\vec{0}|$=0

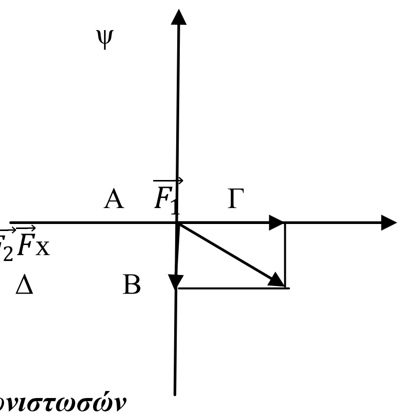
6. Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα άλλων διανυσμάτων, καθένα από τα οποία ονομάζεται **συνιστώσα** του$\vec{\alpha}$.

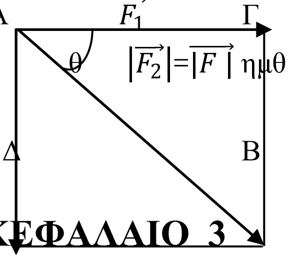
Η ***ανάλυση*** του διανύσματος $\vec{F}$ στις δύο κάθετες συνιστώσες του $\vec{F_1}$ και$\vec{F_2}$ γίνεται ως εξής:

Στην αρχή Α του διανύσματος$\overrightarrow{AB}$= $\vec{F}$, σχηματίζουμε δύο κάθετες ευθείες x΄x και ψ΄ψ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από το πέρας B φέρνουμε δύο κάθετες: τη ΒΓ στη x΄x και τη ΒΔ στη ψ΄ψ. Τότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, επομένως:$\overrightarrow{AB}$= $\overrightarrow{A\Gamma}$ + $\overrightarrow{A\Delta}$ και επιπλέον $\overrightarrow{A\Gamma}$=$\vec{F_1}$ και$\overrightarrow{A\Delta}$ = $\vec{F_2}$

ψ



Μέτρα Συνιστωσών



$|\vec{F_1}|$=$|\vec{F}|$ συνθ

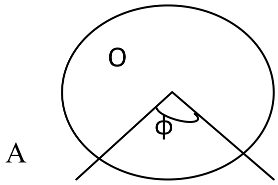
$\vec{F_2}$$\vec{F}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

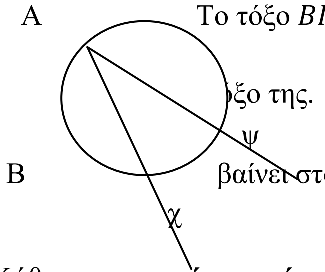
ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

1. Εγγεγραμμένες γωνίες

Επίκεντρη γωνία λέγεται η γωνία της οποίας η κορυφή είναι το κέντρο Ο ενός κύκλου (Ο, ρ) και οι πλευρές της, που τέμνονται από τον κύκλο, είναι ακτίνες του κύκλου.



Εγγεγραμμένη λέγεται μια γωνία της οποίας η κορυφή είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της Αx, Αψ τέμνουν τον κύκλο.



Το τόξο $ΒΓ$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο της. Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία Β$\hat{Α}$Γ βαίνει στο τόξοΒΓ

Κάθε ***εγγεγραμμένη γωνία*** που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας.

- ✓ Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- ✓ Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- ✓ Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

2. Κανονικά πολύγωνα

Ένα πολύγωνο με ν κορυφές θα το λέμε ν – γωνο.

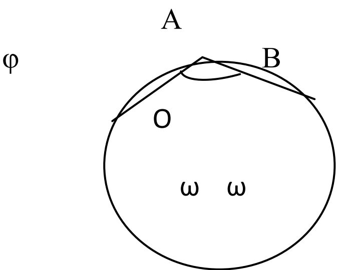
Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται ***τετράπλευρο***.

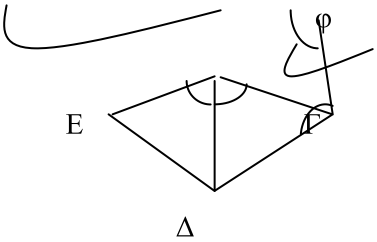
Ένα ***πολύγωνο*** λέγεται ***κανονικό***, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες.

Αποδεικνύεται, ότι, όποιος κι αν είναι ο αριθμός των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου, υπάρχει πάντα ένας κύκλος, ο οποίος διέρχεται από όλες τις κορυφές του. Τότε λέμε ότι το κανονικό πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο και ο κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος στο κανονικό πολύγωνο.

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα κανονικό ν – γωνο εγγεγραμμένο ε κύκλο (Ο,ρ).

Καθεμία από τις επίκεντρες γωνίες, Δ$\hat{O}$Ε Ε$\hat{O}Z$κλπ λέγεται κεντρική γωνία του κανονικού ν – γώνου και συμβολίζεται με ω.





Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού ν – γώνου είναι ίση με $\omega = \dfrac{360^\circ}{\nu}$.

Οι γωνίες του κανονικού ν – γώνου $\hat{\mathrm{AB\Gamma}}, \hat{\mathrm{B\Gamma\Delta}}$ κλπ συμβολίζονται με φ.

Ισχύει ότι: $\omega + \phi = 180^\circ \Leftrightarrow \phi = 180^\circ - \omega$.

Δηλαδή: Η γωνία φ ενός κανονικού ν – γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας ω του ν – γώνου.

3. Μήκος κύκλου – Μήκος τόξου

Το ***μήκος*** του ***κύκλου*** δίνεται από τη σχέση: $L = \pi\delta$ ή $L = 2\pi\rho$, όπου $\pi \simeq 3{,}14$, είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία.

Το **μήκος** ενός **τόξου** μ° ισούται με: $l = 2\pi\rho \cdot \dfrac{\mu}{360^\circ}$.

Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ, το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ είναι ίσο με 1 rad.

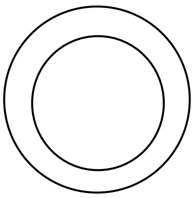
Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με: $l = \alpha\rho$.

Σχέση μοιρών και ακτινίων: $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}$.

4. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου – Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ, ισούται με $\mathbf{E = \pi\rho^2}$.

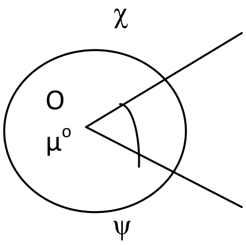
Η περιοχή μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων λέγεται **κυκλικός δακτύλιος** (ή κυκλική στεφάνη).



Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στη γωνία $\chi\hat{O}\psi$ λέγεται **κυκλικός τομέας** μ°, του κύκλου (Ο, ρ).

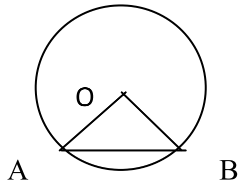
$\mathbf{E_{\kappa\upsilon\kappa.\tau o\mu.} = \pi\rho^2 \cdot \dfrac{\mu}{360}}$

μ°



Αν το τόξο έχει μετρηθεί σε ακτίνια και ισούται με α rad, τότε: $E = \dfrac{1}{2}\alpha\rho^2$.

Το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μεταξύ μιας χορδής και του αντίστοιχου τόξου λέγεται **κυκλικό**


O
A
B