ΑΛΓΕΒΡΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο
ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση και τι αλγεβρική παράσταση;

- ✓ Αριθμητική παράσταση ονομάζεται η έκφραση που περιέχει μόνο αριθμούς
- ✓ Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται η έκφραση που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές

2.Ποια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Ακέραια ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητή της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί

3.Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή μίας παράστασης;

Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται αριθμητική τιμή της παράστασης

4.Τι ονομάζουμε μονώνυμο ; Ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος ενός μονώνυμου;

Μονώνυμο ονομάζεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού

Συντελεστής μονωνύμου ονομάζεται ο αριθμητικός του παράγοντας

Κύριο μέρος μονωνύμου ονομάζεται το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους

1. Ποιο μονώνυμο είναι σταθερό και ποιο μηδενικό, ποια όμοια, ποια ίσα και ποια αντίθετα;

Σταθερό μονώνυμο λέγεται κάθε πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός 0 ονομάζεται ***μηδενικό*** μονώνυμο.

Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος

Ίσα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή

Αντίθετα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές

2. Τι ονομάζουμε βαθμό του μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή και ως προς όλες τις μεταβλητές;

Βαθμός του μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών όλων των μεταβλητών του

7.Πως προσθέτουμε και πολλαπλασιάζουμε δύο μονώνυμα;

✓ ***Το άθροισμα*** ομοίων όρων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους. Για να προσθέσουμε δύο μονώνυμα, θα πρέπει να είναι όμοια.

✓ ***Το γινόμενο*** μονωνύμων είναι μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο οποιαδήποτε μονώνυμα

8.Τι ονομάζουμε πολυώνυμο, όρος και βαθμός πολυωνύμου;

Το άθροισμα ανόμοιων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση που ονομάζεται πολυώνυμο

Σταθερό πολυώνυμο ονομάζεται κάθε αριθμός καθώς κάθε αριθμός θεωρείται ως πολυώνυμο

Μηδενικό πολυώνυμο θεωρείται ο αριθμός 0

Όρος πολυωνύμου ονομάζεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε αυτό

Ο βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία η περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του

9.Ποιά πολυώνυμα ονομάζονται ίσα;
Ίσα ονομάζονται δύο πολυώνυμα όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα

10.Τι ονομάζουμε αναγωγή ομοίων όρων;
Αναγωγή ομοίων όρων σε ένα πολυώνυμο ονομάζεται η αντικατάσταση των ομοίων όρων του με το άθροισμά τους.

11.Πως προσθέτουμε ή αφαιρούμε δύο πολυώνυμα;
Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε δύο πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

12.Πως πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο και πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο ;
- ✓ Για να ***πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο***, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυώνυμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.
- ✓ Πως Για να ***πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο*** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

13.Πως διαιρούμε δύο πολυώνυμα Δ(χ) και δ(χ);
Αν έχουμε δύο πολυώνυμα Δ(χ) (διαιρετέος) και δ(χ) (διαιρέτης) με δ(χ) ≠ 0 και κάνουμε τη διαίρεση Δ(χ) : δ(χ), τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων π(χ) (πηλίκο) και υ(χ) (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει : Δ(χ) = δ(χ) ·π(χ) + υ(χ) – (Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης) – όπου το υ(χ) ή είναι ίσο με το μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(χ)

14. Πότε ένα πολυώνυμο δ είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου Δ;
Ένα πολυώνυμο δ είναι διαιρέτης ή παράγοντας ενός πολυωνύμου Δ, αν η διαίρεση Δ:δ είναι τέλεια, δηλαδή αν υπάρχει πολυώνυμο π, τέτοιο ώστε να ισχύει Δ = δ· π

15.Ποιο είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και ποιος ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων;
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ΕΚΠ δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του
Μέγιστος κοινός Διαιρέτης ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

16. Τι ονομάζεται ταυτότητα;
Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ	ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Τετράγωνο αθροίσματος $(α+β)^2=α^2 + 2αβ + β^2$	$(α+β)^2=(α+β)(α+β)=α^2+αβ+βα+β^2=α^2+2αβ+β^2$
Τετράγωνο διαφοράς: $(α-β)^2=α^2-2αβ+β^2$	$(α-β)^2=(α-β)(α-β)=α^2-αβ-βα+β^2=α^2-2αβ+β^2$
Κύβος αθροίσματος $(α+β)^3=α^3 + 3α^2β+3αβ^2 + β^3$	$(α+β)^3= (α+β)\ (α+β)^2=(α+β)(\ α^2 + 2αβ + β^2)=$ $α^3+2α^2β+αβ^2+βα^2+2αβ^2+β^3 = α^3 + 3α^2β+3αβ^2 + β^3$

ύβος διαφοράς : $(α-β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$	$(α-β)^3 = (α-β)\,(α-β)^2 = (α-β)(\,α^2 - 2αβ + β^2) =$ $α^3 - 2α^2β + αβ^2 - βα^2 + 2αβ^2 - β^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$
ινόμενο αθροίσματος επί διαφορά $(α-β)(α+β) = α^2 - β^2$	$(α-β)(α+β) = α^2 + αβ - βα - β^2 = α^2 - β^2$
θροισμα κύβων : $(α+β)(\,α^2 - αβ + β^2) = α^3 + β^3$	$+β)(\,α^2 - αβ + β^2) = α^3 - α^2β + αβ^2 - βα^2 - αβ^2 + β^3 = α^3 + β^3$
πόδειξη: Διαφορά κύβων : $(α-β)(\,α^2 + αβ + β^2) = α^3 - β^3$	$(α-β)(\,α^2 + αβ + β^2) = α^3 + α^2β + αβ^2 - βα^2 - αβ^2 - β^3 = α^3 - β^3$

17. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση και ποιες οι βασικές μορφές παραγοντοποίησης ;

Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μια παράσταση από άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ
Κοινός παράγοντας $αx + αy = α(x+y)$
Ομαδοποίηση$αx + αy + βx + βy = α(x+y) + β(x+y) = (x+y)(α+β)$
Διαφορά τετραγώνων $α^2 - β^2 = (α-β)(α+β)$
Άθροισμα κύβων$α^3 + β^3 = (α+β)(α^2 - αβ + β^2)$ Διαφορά κύβων $α^3 - β^3 = (α-β)(α^2 + αβ + β^2)$
Ανάπτυγμα τετραγώνου $α^2 + 2αβ + β^2 = (α+β)^2$ $α^2 - 2αβ + β^2 = (α-β)^2$
Τριώνυμο$x^2 + (α+β)x + αβ = (x+α)(x+β)$

18. Τι ονομάζουμε ρητή αλγεβρική παράσταση;

Ρητή ***αλγεβρική παράσταση*** ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα. Οι ***μεταβλητές*** μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή της

19. Πως απλοποιούμε μια ρητή παράσταση;

Για να απλοποιήσουμε μια ρητή παράσταση :

- ✓ ***Παραγοντοποιούμε*** τους όρους της
- ✓ ***Διαγράφουμε*** τους κοινούς παράγοντες των όρων της

20.Πως πολλαπλασιάζουμε δύο ρητές παραστάσεις και πως διαιρούμε;

✓ ***Για να πολλαπλασιάσουμε*** δυο κοινές ρητές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε τους αριθμητές και τους παρανομαστές τους και στη συνέχεια απλοποιούμε τη νέα ρητή παράσταση.

✓ ***Για να διαιρέσουμε*** δύο ρητές παραστάσεις, αντιστρέφουμε τους όρους της δεύτερης ρητής παράστασης και κάνουμε πολλαπλασιασμό

21.Πως προσθέτουμε δύο ρητές παραστάσεις;

Για να προσθέσουμε δύο ρητές παραστάσεις:

- ✓ ***Παραγοντοποιούμε*** τους παρανομαστές
- ✓ ***Βρίσκουμε*** το ΕΚΠ των παρανομαστών
- ✓ ***Μετατρέπουμε*** τα κλάσματα σε ομώνυμα
- ✓ ***Κάνουμε*** τις πράξεις και τις απλοποιήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{Ο}$
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.Τι ονομάζουμε εξίσωση και τι λύση ή ρίζα της εξίσωσης;
- ✓ Εξίσωση ονομάζεται η ισότητα που περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές.
- ✓ Λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης είναι ο αριθμός που την επαληθεύει.

2.Ποια εξίσωση ονομάζεται αδύνατη και ποια αόριστη;
Αδύνατη είναι η εξίσωση που δεν έχει καμία ρίζα
Αόριστη είναι η εξίσωση που το πλήθος των ριζών της είναι άπειρο

3.Ποια είναι η μορφή μιας πρωτοβάθμιας και μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;
Εξίσωση **1^ου^ βαθμού** με άγνωστο x είναι η ισότητα της μορφής : **$αx+β=0$, με $α\neq0$**
Εξίσωση **2^ου^ βαθμού** με άγνωστο x είναι η ισότητα της μορφής : **$αx^2+βx+γ=0$, με $α\neq0$**

4.Ποιοι είναι οι τρόποι επίλυσης μιας εξίσωσης 2^ου^ βαθμού;
- ✓ Με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων :

Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο α΄μέλος
Αναλύουμε το α΄μέλος σε γινόμενο παραγόντων (παραγοντοποίηση)
Αφού το γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν, θα πρέπει κάθε παράγοντας του γινομένου να είναι ίσος με το μηδέν.
- ✓ Με τη βοήθεια τύπου

Διακρίνουσα: **$Δ=β^2-4αγ$**
Κάθε εξίσωση της μορφής **$αx^2+βx+γ=0$, με $α\neq0$:**
Αν $Δ>0$, έχει δύο άνισες λύσεις. Τις $x_{1,2}=\frac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$
Αν $Δ<0$, έχει μία διπλή λύση. Την $x=\frac{-β}{2α}$
Αν $Δ<0$, δεν έχει καμία λύση στο R. Δηλαδή η εξίσωση είναι **αδύνατη**

5. Ποια εξίσωση ονομάζεται κλασματική;
Κλασματική ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρανομαστή

6. Τι θα πρέπει να ισχύει ώστε να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση;
Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρανομαστές να είναι διαφορετικοί του μηδενός

7.Πως λύνουμε μια κλασματική εξίσωση;
Αναλύουμε τους παρανομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρανομαστών.
Παίρνουμε περιορισμούς. Δηλαδή προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρανομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.
Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρανομαστών και διαγράφουμε τους παρανομαστές.
Παραγοντοποιούμε όποιες πράξεις μπορούμε και επιλύουμε την εξίσωση.
Όταν βρούμε τις λύσεις ***δεχόμαστε μόνο αυτές που ικανοποιούν τους περιορισμούς***, ενώ όποιες δεν τους ικανοποιούν, τις απορρίπτουμε.

3. **Ποιοι αριθμοί ονομάζονται διατεταγμένοι;**
   Διατεταγμένοι είναι δύο ή περισσότεροι αριθμοί που παριστάνονται με σημεία επάνω σε έναν άξονα αριθμών.

4. Πως συγκρίνουμε δύο αριθμούς α και β που δεν έχουνε παραταθεί με σημεία ενός άξονα;

Για να συγκρίνουμε δυο πραγματικούς αριθμούς α και β που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, βρίσκουμετην διαφορά τους α-β και εξετάζουμε αν είναι
θετική ή αρνητική ή μηδέν.

Αν α-β>0 τότε α>β
Αν α-β<0 τότε α<β
Αν α-β=0 τότε α=β

12.Ποιες είναι οι ιδιότητες διάταξης;

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ
Αν α>β τότε α+γ>β+γ και α-γ>β-γ
Αν α>β και γ>0 τότε αγ>βγ και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$
Αν α>β και γ<0 τότε αγ<βγ και $\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$
Αν α>β και γ>δ τότε α+γ>β+δ
Αν α>β και β>γ τότε α>γ (Μεταβατική ιδιότητα)
Αν α,β,γ,δ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με α>β και γ>δ τότε αγ>βδ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}
ΣΥΣΤΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

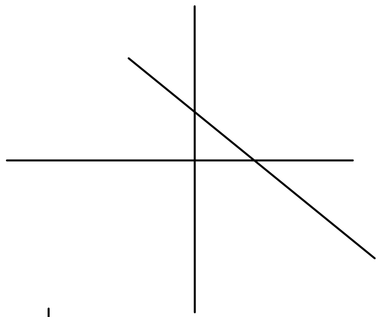
1.Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση και ποια η λύση της;

- ✓ ***Γραμμική εξίσωση*** με δύο αγνώστους ονομάζουμε μία εξίσωση της μορφής αx+βx=γ, όπου α, βκαι γ είναι πραγματικοί αριθμοί και x,y μεταβλητές
- ✓ ***Λύση γραμμικής εξίσωσης*** είναι κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) που την επαληθεύει

3.Τι παριστάνουν γραφικά οι γραμμικές εξισώσεις;y΄

Οι γραμμικές εξισώσεις της μορφής ***αx +βy=γ,με α≠0*** και ***β≠0*** παριστάνουν ευθείες

- ✓ Αν ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας
- ✓ Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή. x O x΄

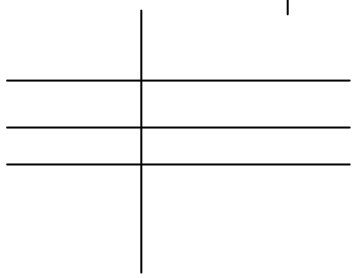


y
y΄

4.Τι παριστάνουν οι εξισώσεις y=κ και x=κ;

Η εξίσωση y=κ με κ≠0 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα xx΄και τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο (Ο,κ) ενώ ηy=0 εξίσωση y=0 παριστάνει τον άξονα xxy=-κ

y=κ



Η εξίσωση x=κ με κ≠0 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα yy΄και τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο (Ο,κ) ενώ η εξίσωση x=0 παριστάνει τον άξονα yy΄

5.Ποιά γραμμική εξίσωση ονομάζεται αδύνατη;

Κάθε εξίσωση της μορφής ***Οx+Οy=γ με γ≠0 δεν παριστάνει ευθεία***, διότι κανένα ζεύγος αριθμών (x,y) δεν είναι λύση της. Δηλαδή είναι αδύνατη εξίσωση.

6.Ποιά γραμμική εξίσωση ονομάζεται αόριστη;

Κάθε εξίσωση της μορφής ΟΧ+ΟΥ=0, επαληθεύεται για κάθε ζεύγος αριθμών (x,y). Δηλαδή είναι αόριστη η εξίσωση.

7.Ποιά ονομάζουμε λύση ενός γραμμικού συστήματος;

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο άγνωστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x,y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του. Η ***μοναδική λύση*** ενός γραμμικού συστήματος είναι το κοινό σημείο που έχουν οι ευθείες των εξισώσεων.

8.Τι σημαίνει ότι ένα σύστημα είναι αδύνατο και τι είναι αόριστο;

- ✓ Όταν ένα σύστημα είναι αδύνατο σημαίνει ότι οι ευθείες των εξισώσεων δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, δηλαδή είναι παράλληλες.
- ✓ Όταν ένα σύστημα είναι αόριστο σημαίνει ότι οι ευθείες των εξισώσεων έχουν άπειρα κοινά σημεία, δηλαδή συμπίπτουν.

9.Ποιες είναι οι μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος;

Μέθοδος αντικατάστασης

Για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- ✓ Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο
- ✓ Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράσταση του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία λύνουμε και βρίσκουμε την τιμή του αγνώστου αυτού
- ✓ Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή αυτή σε μία από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου
- ✓ Προσδιορίζουμε την λύση του συστήματος

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Για να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών κάνουμε τα εξής βήματα:

- ✓ Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους
- ✓ Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και απαλείφουμε τους αγνώστους με τους αντίθετους συντελεστές με αποτέλεσμα να προκύψει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία την λύνουμε
- ✓ Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου αγνώστου
- ✓ Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

- ✓ Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. (***Π-Π-Π)***
- ✓ Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ***(Π-Γ-Π)***
- ✓ Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα ***(Γ-Π-Γ)***

2.Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

- ✓ Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία
- ✓ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

3.Ποια είναι η ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου;

Κάθε ***σημείο της μεσοκαθέτου*** ενός ευθύγραμμου τμήματος ι***σαπέχει*** από τα άκρα του.

Αντίστροφα: Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

4.Ποια είναι η ιδιότητα των σημείων μιας διχοτόμου;

Κάθε ***σημείο της διχοτόμου*** μιας γωνίας ***ισαπέχει*** από τις πλευρές της γωνίας

Αντίστροφα: Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της

5.Λόγοι ευθύγραμμων τμημάτων

✓ Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει

✓ Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

6.Τι ισχύει για την δίαμεσο που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου;

✓ Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

✓ Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος α προς το ευθύγραμμο τμήμα β συμβολίζεται $\frac{\alpha}{\beta}$ και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει α=λ·β

✓ Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης

✓ Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β,δ όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$

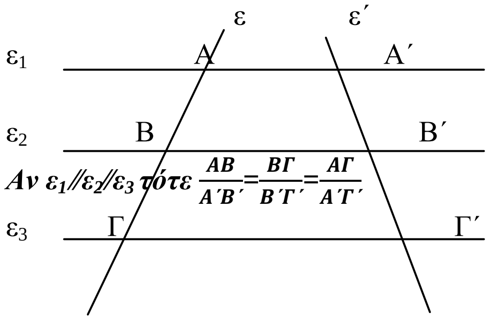
7.Ποιες είναι οι ιδιότητες των αναλογιών;

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$**, τότε** $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ **ή** $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$**, τότε** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ **, τότε αδ=βγ**

8.Θεώρημα του Θαλή



Αν $\boldsymbol{\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2 /\!/ \varepsilon_3}$ ***τότε*** $\frac{AB}{A'B'}=\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

9.Τι ονομάζουμε ομοιόθετο ενός σημείου Α;

Ομοιόθετο ενός σημείου Α ως προς κέντρο Ο και λόγο ομοιοθεσίας λ ονομάζεται το σημείο Α΄ της ημιευθείας ΟΑ για το οποίο ισχύει : ΟΑ΄= λ ˙ ΟΑ

Δυο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Οι ***ανάλογες*** πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες

Οι ομοιόθετες γωνίες είναι ***ίσες***

Τα ομοιόθετα ευθύγραμμα τμήματα που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα

Αν το πολύγωνο Π΄ είναι ομοιόθετο του Π με λόγο λ, τότε το Π΄ είναι:

- μεγέθυνση του Π, όταν λ>1

- σμίκρυνση του Π, όταν 0<λ<1

- ίσο με το Π, όταν λ=1

10.Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;

Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια. Τα ομοιόθετα πολύγωνα είναι ίσα

11.Τι ισχύει για τις πλευρές και τις γωνίες δύο ομοίων πολυγώνων;

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

12.Με τι ισούται ο λόγος περιμέτρων δύο ομοίων πολυγώνων;

Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους

13.Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια;

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια

14.Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια

15.Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων;

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1.Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{\omega}$= Χ$\widehat{O}$Μ με Μ($x_o y_o$)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΟ εφαρμόζουμε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών για την γωνία $\widehat{\omega}$

ημω=$\frac{απέναντικάθετηπλευρά}{υποτείνουσα}$**y**

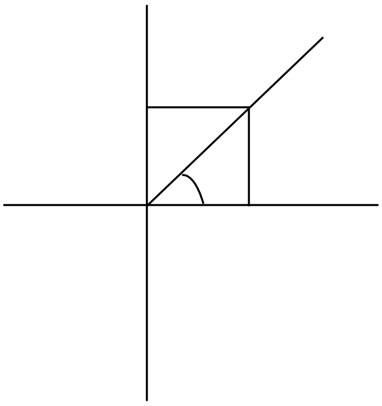
συνω=$\frac{προσκείμενηκάθετηπλευρά}{υποτείνουσα}$

εφω=$\frac{απέναντικάθετηπλευρά}{προσκείμενηκάθετηπλευρά}$**ΒΜ**

Άρα θα έχουμε ημω=$\frac{MA}{OM}=\frac{Yo}{\rho}$**$y_o$** ρ

συνω=$\frac{OA}{OM}=\frac{Xo}{\rho}$ **ω Α**

εφω= $\frac{AM}{OA}=\frac{Yo}{Xo}$xΟ$x_o$x΄



y΄

Για οποιαδήποτε γωνία x$\widehat{O}$Μ με Μ(x,y) θα ισχύει :

ημω=$\frac{y}{\rho}$ **συνω**= $\frac{x}{\rho}$

εφω= $\frac{y}{x}$ **ρ**=$\sqrt{x^2+y^2}$

x: τετμημένη του σημείου Μ

y: τεταγμένη του Μ

ρ: Η απόσταση του σημείου Μ, από την αρχή των αξόνων Ο

Η y Ο

2ο**τεταρτημόριο** **1ο τεταρτημόριο**

(x<0, y>0,ρ>0) **(x>0, y>0,ρ>0)**

ημω>0 **ημω>0**

συνω<0 **συνω>0**

εφω<0 **εφω>0x΄** **Ο** **Χ**

3ο τεταρτημόριο **4ο τεταρτημόριο**

(x<0, y<0,ρ>0) **(x<0, y>0,ρ>0)**

Ημω<0 **ημω<0**

συνω<0 **συνω>0**

εφω>0 **εφω<0**

ΕΣ

2.Πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών

ω	0ο	90ο	180ο	270ο	360ο
ημω	0	1	0	-1	0
συνω	1	0	-1	0	1
εφω	0	Δεν ορίζεται	0	Δεν ορίζεται	0

ω	30ο	45ο	60ο
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3.Τι ισχύει για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και (180^o –ω) ισχύουν:

$$\eta\mu(180^o-\omega)=\eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega(180^o-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^o-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$$

Αν δύο γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και είναι ***0*** ***0^o μέχρι και 180^o*** . τότε είναι ***ίσες ή παραπληρωματικές***

4.Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ και $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ για συνω≠0

Απόδειξη της ισότητας $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

Γνωρίζουμε ότι για το σημείο Μ(x,y) ισχύει:

$P=\sqrt{x^2+y^2}$ ή $\rho^2=x^2+y^2$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ισότητας με ρ^2

$\frac{\rho^2}{\rho^2}=\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}$ **Άρα** $(\frac{x}{\rho})^2+(\frac{y}{\rho})^2=1$

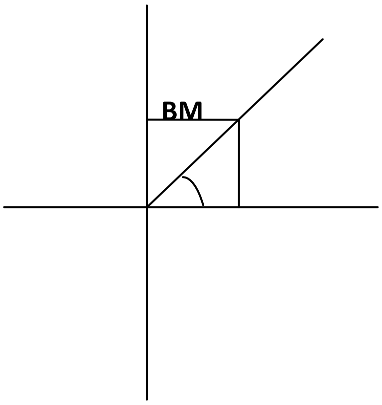
y

Επειδή όμως ημω=$\frac{y}{\rho}$ και συνω=$\frac{x}{\rho}$

Θα έχουμε $(\eta\mu\omega^2)+(\sigma\upsilon\nu\omega)^2=1$

Επομένως $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ y_o ρ

ω A



xOx_ox'

y′

Απόδειξη της ισότητας $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Γνωρίζουμε ότι **$\varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{x}$**

Επίσης: $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}}=\frac{y.\rho}{x.\rho}=\frac{y}{x}$

Επομένως **$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$**

5.Νόμος ημιτόνων

Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του

$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

6. Νόμος συνημιτόνων

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A$$

$$\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma.\sigma\upsilon\nu B$$

$$\gamma^2=\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\Gamma$$