Τυπολόγιο: Άλγεβρα Α' Λυκείου

Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο αριθμό

Έστω α πραγματικός αριθμός και ν θετικός ακέραιος με ν ≥ 2. Τότε ορίζουμε:

$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha.......\alpha}_{\nu\text{-παράγοντες}}$, ν ≥ 2 και για ν = 1: $\alpha^1 = \alpha$

Αν επιπλέον α≠0, τότε ορίζουμε $\alpha^0 = 1$ και $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

Προσοχή: Αν α = β τότε πάντα ισχύει ότι και $\alpha^\nu = \beta^\nu$. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει αν α,β δεν είναι θετικοί αριθμοί. Με τους αναγκαίους περιορισμούς ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

i) $\alpha^\nu\cdot\alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$ ii) $\alpha^\nu:\alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$ iii) $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\cdot\mu}$ iv) $\alpha^\nu\cdot\beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu$ v) $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$ vi) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

όπουν,μ ακέραιοι αριθμοί

Ταυτότητες

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

$(\chi+\alpha)(\chi+\beta) = \chi^2 +(\alpha+\beta)\chi +\alpha\beta$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 +3\alpha^2\beta +3\alpha\beta^2 +\beta^3$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 -3\alpha^2\beta +3\alpha\beta^2 -\beta^3$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 +\alpha\beta +\beta^2)$

$\alpha^3 -\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 +\alpha\beta+\beta^2)$

και γενικά: $\alpha^\nu -\beta^\nu = (\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1} +\alpha^{\nu-2}\beta+.....+\alpha\beta^{\nu-2} +\beta^{\nu-1})$

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

- Αν χ είναι πραγματικός αριθμός, η απόλυτη τιμή του συμβολίζεται με |χ| και ορίζεται ως εξής:

  $|\chi| = \begin{cases} \chi, & \text{αν } \chi \geq 0 \\ -\chi, & \text{αν } \chi < 0 \end{cases}$

Ιδιότητες

Για την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού αποδεικνύονται εύκολα οι πιο κάτω ιδιότητες.

- $|-\chi| = |\chi|$, χεR
- $-|\chi| \leq \chi \leq |\chi|$
- $|\chi|^2 = \chi^2$
- $|xy| = |x|\cdot|y|$, x,yεR. Γενικά: $|\chi_1\cdot\chi_2.....\chi_\nu| = |\chi_1|\cdot|\chi_2|.....|\chi_\nu|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, xεR, yεR*
- $|\chi^\kappa| = |\chi|^\kappa$, κεZ*
- $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x| +|y|$ (Τριγωνικήανισότητα). Γενικά: $|\chi_1+\chi_2+......+\chi_\nu| \leq |\chi_1| +|\chi_2|+....|\chi_\nu|$
- $|\chi| = \theta$, θ> 0 <=>χ = -θήχ = θ
- $|\chi| \leq \theta$, θ> 0 <=> $-\theta \leq \chi \leq \theta$
- $|\chi| \geq \theta$, θ >0 <=> $\chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

- Έστω α ≥0. Ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα του α και συμβολίζουμε με $\sqrt{\alpha}$, τον μη αρνητικό αριθμό β, έτσι ώστε $\beta^2 = \alpha$. Δηλαδή $\sqrt{\alpha}$ **= β <=> β^2 = α, α,β ≥0**

- Αν **α ≥ 0**, ονομάζουμε νιοστή ρίζα του α και συμβολίζουμε με $\sqrt[\nu]{\alpha}$, τον μη αρνητικό αριθμό β ώστε $\beta^{\nu} = \alpha$, όπου ν θετικός ακέραιος δηλ. $\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^{\nu} = \alpha,\ \alpha,\beta \geq 0$.

Ιδιότητες

- Αν α≥ 0 και ν∈N^* τότε $(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}) = \alpha$.
- **2.** $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, α∈R. Γενικότερα: $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$, α∈R και $\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{2\nu+1}} = |\alpha|$, α ≥ 0.
- Αν α,β ≥ 0 και ν∈N^* τότε $\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$
- Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu} \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\kappa}$, κ∈$N^*$.
- Αν α ≥ 0, β > 0 και ν∈N^* τότε: $\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$
- Αν α ≥ 0 και ν,μ, κ ∈N^* τότε: $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\kappa]{\alpha^{\mu\kappa}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

<u>Δυνάμεις με ρητό εκθέτη</u>

Αν **α > 0 είναι ακέραιος και ν θετικός ακέραιος** ορίζουμε: $\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$

Αν α = 0 τότε για μ,ν θετικούς ακεραίους ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$

<u>Εξισώσεις 1ου βαθμού</u>

Η εξίσωση αχ + β = 0

Είναι εύκολο να δούμε ότι:

α ≠ 0	α = 0	
Μοναδική λύση $\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$	β ≠ 0	β = 0
	Αδύνατη	Ταυτότητα

<u>Παραμετρική εξίσωση</u> ονομάζεται κάθε εξίσωση, που οι συντελεστές των αγνώστων ή ο σταθερός όρος εκφράζονται με την βοήθεια γραμμάτων και όχι συγκεκριμένων αριθμών.
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι **α ≠ 0**. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση έχει **<u>μοναδική λύση.</u>**
- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι **α = 0 και β ≠ 0**. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση είναι **<u>αδύνατη.</u>**
- Βρίσκουμε τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες είναι **α = 0 και β = 0**. Για τις τιμές αυτές η εξίσωση είναι **<u>ταυτότητα.</u>**

<u>Ανισώσεις 1ου βαθμού</u>

Όταν στις ανισώσειςαχ+β> 0, αχ+β< 0 τα α,β δεν είναι συγκεκριμλενοι αριθμοί τότε οι ανισώσεις αυτές ονομάζονται **παραμετρικές.** Η διαδικασία προσδιορισμού των λύσεων μιας παραμετρικής ανίσωσης ονομάζεται **διερεύνηση.**
Από την διερεύνηση της ανίσωσης αχ+β>0, όπου α,β είναι παράμετροι, προκύπτουν τα εξής:

- **Αν α > 0** τότε αχ+β> 0 <=> αχ > -β <=> $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$ δηλαδή η ανίσωση αχ+β > 0 έχει τις λύσεις:
  $\chi > -\frac{\beta}{\alpha}$
- **Αν α < 0** τότε αχ+β> 0 <=> αχ > -β <=> $\chi < -\frac{\beta}{\alpha}$ δηλαδή η ανίσωση αχ+β > 0 έχει τις λύσεις:
  $\chi < -\frac{\beta}{\alpha}$
- **Αν α = 0 και β> 0** τότε η ανίσωση γίνεται 0χ+β >0 <=> β > 0 που ισχύει. Άρα η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό χ.
- **Αν α = 0 και β ≤ 0** τότε η ανίσωση γίνεται: 0χ +β > 0 <=> β > 0 που είναι αδύνατη. Άρα η ανίσωση είναι αδύνατη.

<u>Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου</u>

Για τη λύση εξισώσεων με απόλυτα χρησιμοποιούμε τα εξής:

- $|\chi| = \alpha$, $\alpha > 0 \Leftrightarrow \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$
- $|\chi| = |\alpha| \Leftrightarrow \chi = \alpha$ ή $\chi = -\alpha$
- $|\chi|^2 = \chi^2$
- $|\chi| = \alpha$, $\alpha < 0$ είναι αδύνατη.

Στις ανισώσειςπου περιέχουν απόλυτα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες:
1. $|\chi| \leq \theta$, $\theta > 0 \Leftrightarrow -\theta \leq \chi \leq \theta$
2. $|\chi| \geq \theta$, $\theta > 0 \Leftrightarrow \chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$
Αν $\theta < 0$: Η ανίσωση $|\chi| < \theta$ είναι αδύνατη (αφού $|\chi| \geq 0$)
Η ανίσωση $|\chi| > \theta$, ισχύει για κάθε $\chi \in R$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
αν $\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
αν $\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $\chi_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$
αν $\Delta < 0$	Δεν έχει πραγματικές ρίζες

Η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται **διακρίνουσα**της εξίσωσης.
[τύποι του Vieta] Έστω χ_1, χ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ **(1)**
Είναι: $S = \chi_1 + \chi_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \chi_1 \cdot \chi_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$
Οπότε $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ πέρνει την μορφή $\boldsymbol{\chi^2 - S\chi + P = 0, \alpha \neq 0}$.

Μορφή και πρόσημο της $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, $\alpha \neq 0$
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
1. $\Delta > 0$, τότε είναι $f(x) = \alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)$.

Χ	$-\infty$ χ_1	χ_2	$+\infty$
F(x)	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α

2. Αν $\Delta = 0$ τότε $f(x) = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ οπότε το $f(\chi)$ είναι ομόσημο του α για κάθε $\chi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Χ	$-\infty$ $-\frac{\beta}{2\alpha}$	$+\infty$
F(x)	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α

3. Αν $\Delta < 0$ τότε $f(\chi) = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$ και επειδή η παράσταση στην αγκύλη είναι θετική για κάθε $\chi \in R$, το $f(\chi)$ είναι ομόσημο του α σε όλο το R.

χ	$-\infty$ $+\infty$
F(x)	Ομόσημο του α

Γραμμικά συστήματα

Γραμμικά συστήματα 2x2
Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha\chi + \beta y = \gamma$ λέγεται **γραμμική εξίσωση** με δύο αγνώστους.
Λύση της ονομάζουμε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών (χ,y) που επαληθεύει.
α. Ένα πλήθος δυο γραμμικών εξισώσεων με δυο αγνώστους ονομάζεται γραμμικό σύστημα 2x2 π.χ.

$$\begin{cases} \alpha_1\chi + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2\chi + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$ είναι ένα 2x2 σύστημα.

β. **Λύση** ενός συστήματος ονομάζεται κάθε ζεύγος (χ,y) πραγματικών αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος.
Επίλυση ενός συστήματος ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης του συνόλου των λύσεων του συστήματος.
Ένα σύστημα μπορούμε να το επιλύσουμε με τις εξής μεθόδους:

1. Μέθοδος της **αντικατάστασης**
2. Μέθοδος των **αντίθετων συντελεστών** ή της απαλοιφής.
3. Μέθοδος των **οριζουσών**

<u>Επίλυση - διερεύνηση του συστήματος</u>
Θεωρούμε το σύστημα (Σ):

$$\begin{cases} αχ + βy = γ \\ α'χ + β'y = γ' \end{cases}$$

Ονομάζουμε ορίζουσα του συστήματος την παράσταση D = $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ = αβ' - α'β

Συμβολίζουμε με D_X την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα D αν στην θέση των συντελεστών του χ θέσουμε τους σταθερούς όρους.

$D_X = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}$ = β'γ - βγ'

Συμβολίζουμε με D_y την ορίζουσα που προκύπτει από την ορίζουσα D αν στην θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους.

$D_X = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}$ = αγ' - α'γ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
1. Αν D ≠0 τότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση: (χ,y) = $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$
2. Αν D = 0 και (D_x ≠ 0 ή D_y ≠ 0) το σύστημα είναι αδύνατο.
3. Αν D = D_x = D_y =0 τότε το σύστημα θα είναι αόριστο εκτός εάν α = α' = β = β' = 0 και γ ≠ 0 ή γ' ≠0, οπότε θα είναι αδύνατο.

Ομογενές λέγεται το σύστημα του οποίου οι σταθεροί όροι είναι μηδέν

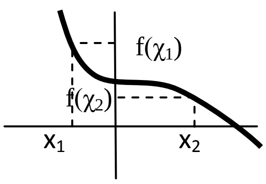
<u>Η έννοια της συνάρτησης</u>
Ορισμός συνάρτησης
Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A⊆R τη διαδικασία με την οποία κάθε χ∈A αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο y∈B⊆R.
Το σύνολο A⊆R από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή χ, λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f, ενώ το σύνολο B⊆R από το οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή y ονομάζεται **σύνολο (πεδίο) τιμών** της f και συμβολίζεται με f(A). Συμβολικά γράφουμε: f: A→B = f(A) και εννοούμε ότι η f είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και σύνολο τιμών το f(A)⊆R.

Άρτια - Περιττή
i. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A για την οποία ισχύουν:
Την συνάρτηση f την ονομάζουμε **άρτια** συνάρτηση, αν χ∈A, τότε και -χ∈Af(-χ) = f(χ), για κάθε χ∈A

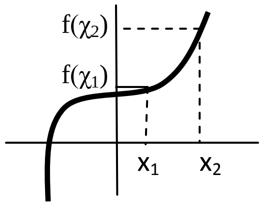
ii. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A για την οποία ισχύουν:
Την συνάρτηση f την ονομάζουμε **περιττή** συνάρτηση, αν χ∈A, τότε και -χ∈A f(-χ) = -f(χ), για κάθε χ∈A

Οι άρτιες συναρτήσεις έχουν γραφικήπαράσταση, συμμετρική ως προς τονάξονα y'y.Οι περιττές συναρτήσεις έχουν γραφικήπαράσταση, συμμετρική ως προς τηναρχή των αξόνων Ο(0,0).

Μονοτονία
Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ.
Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, αν για κάθε $χ_1$, $χ_2$ ∈Δ με $χ_1$< $χ_2$ ισχύει ***f(χ₁) >f(χ₂)***

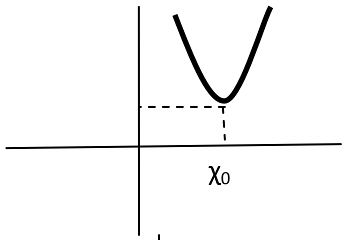


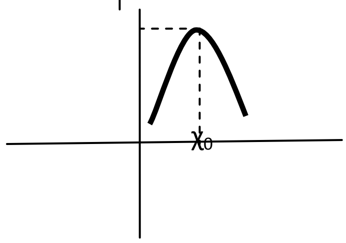
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ.
Η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Δ, αν για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει ***f(χ₁) <f(χ₂)***



Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ, θα λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** στο διάστημα αυτό.

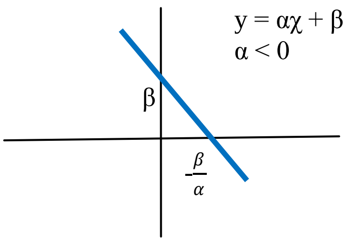
Ακρότατα συνάρτησης
Ολικό ελάχιστο:
Αν Α είναι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και για κάποιο $\chi_0 \in A$, ισχύει:**$f(\chi) \geq f(\chi_0)$, για κάθε $\chi \in A$**
λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $\chi \in A$ **ολικό ελάχιστο** το $f(\chi_0)$ στο Α.

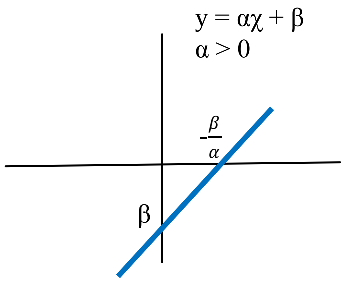


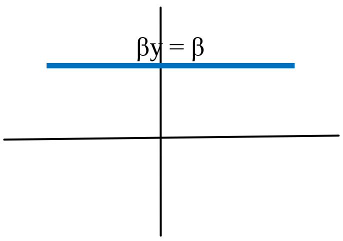


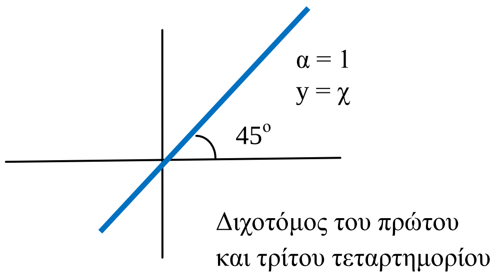
Ολικό μέγιστο:
$f(\chi) \leq f(\chi_0)$, για κάθε $\chi \in A$
λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $\chi \in A$ **ολικό μέγιστο** το $f(\chi_0)$ στο Α.

$f(\chi) = \alpha\chi + \beta,\ \alpha,\beta \neq 0$









Έχουμε τη συνάρτηση f με f(χ) = αχ +β της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ευθεία ε και δύο σημεία της Α (χ_A, y_A), Β (χ_B, y_B).
Κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος η απόσταση των σημείων Α, Β κατά μήκος μιας ευθείας είναι: (ΑΒ) $= \sqrt{(\chi_B - \chi_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Δ	**Εξίσωση $αχ^2 + βχ + γ = 0$**	**Μορφές τριωνύμου**
Θετικό πρόσημο	2 ρίζες άνισες $ρ_1, ρ_2 = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α}$ $Δ = β^2 - 4αγ$	$αχ^2 + βχ + γ = α(χ-ρ_1)(χ-ρ_2)$
0	Ρίζα διπλή $ρ_1 = ρ_2 = -\frac{β}{2α} = χ_0$ $Δ = β^2 - 4αγ$	$= α(χ + \frac{β}{2α})^2$
Αρνητικό πρόσημο	Δεν έχει ρίζες στο R	$= α[(χ + \frac{β}{2α})^2 + \frac{\|Δ\|}{4α^2}]$ **Δεν αναλύεται** σε γινόμενο πρωτοβάθμιων